# L'irrazionalità di $\pi$

Fausto Vezzzaro

12 giugno 2023

Sebbene la prima dimostrazione dell'irrazionalità di $\pi$ risalga agli anni 1760 (Lambert, un amico di Eulero), la dimostrazione può semplice oggi nota è stata scoperta solo in tempi sorprendentemente recenti: nel 2010 (Zhou, Markov). Essa sfrutta solo l'integrazione per parti ed è in teoria accessibile anche a un bravo studente delle superiori. La ho trovata sfogliando l'ottimo Elementary Analysis di Ross e la riporto qui (spezzettata in 10 punti) cercando di essere il più semplice e dettagliato possibile. Spero che il lettore apprezzi la bellezza del risultato, oltre alla perseveranza e alla creatività di Zhou e Markov, che ci hanno regalato questa perla.

1. Definisco le seguenti due grandezze

$$P_n(x) = \frac{(x(\pi - x))^n}{n!} \tag{1a}$$

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x dx \tag{1b}$$

dove $n \in \mathbb{N}$.

2. Sfrutto l'integrazione per parti $\int udv = uv - \int vdu$ ponendo $u = P_n(x)$ e $dv = \sin xdx$ trovando (si noti che $P_n(0) = P_n(\pi) = 0$)

$$I_n = \int_0^\pi P_n'(x) \cos x dx \tag{2}$$

Ponendo poi $u = P_n'(x)$ e $dv = \cos xdx$ si trova (il seno si annulla agli estremi di integrazione)

$$I_n = -\int_0^\pi P_n''(x) \sin x dx \tag{3}$$

3. È facile verificare che vale la seguente identità (la limitazione su $n$ è dovuta al fatto che $P_n(x)$ è definito per $n \in \mathbb{N}$)

$$P_n'(x) = P_{n-1}(x)(\pi - 2x) \qquad (n \geqslant 1) \tag{4}$$

Derivando ambo i membri e sfruttando nel secondo membro la $P_{n-1}'(x) = P_{n-2}(x)(\pi - 2x)$ che possiamo ottenere dalla (4) stessa, possiamo scrivere

$$P_n''(x) = P_{n-2}(x)(\pi - 2x)^2 - 2P_{n-1}(x) \qquad (n \geqslant 2) \tag{5}$$

che può essere scritto anche così

$$P_n''(x) = \pi^2 P_{n-2}(x) + P_{n-2}(x)(-4\pi x + 4x^2) - 2P_{n-1}(x) \qquad (n \geqslant 2) \tag{6}$$

È facile verificare che il termine centrale a secondo membro può essere scritto come $-4\frac{(x(\pi-x))^{n-1}}{(n-2)!}$ e dunque come $-4P_{n-1}(x)(n-1)$. Possiamo allora concludere che

$$P_n''(x) = \pi^2 P_{n-2}(x) - (4n - 2)P_{n-1}(x) \qquad (n \geqslant 2) \tag{7}$$

4. Sfruttando la (7) torniamo alla (3) e scriviamo

$$I_n = -\pi^2 \int_0^\pi P_{n-2}(x) \sin x dx + (4n-2) \int_0^\pi P_{n-1}(x) \sin x dx \qquad (n \geqslant 2) \tag{8}$$

Confrontando con (1b) vediamo che questo significa

$$I_n = -\pi^2 I_{n-2} + (4n-2) I_{n-1} \qquad (n \geqslant 2) \tag{9}$$

5. Dalla definizione (1b) si vede subito che $I_0 = 2$. Inoltre la primitiva di $x(\pi - x)\sin x$ è $(\pi - 2x)\sin x + (x^2 - \pi x - 2)\cos x + c$, quindi si trova $I_1 = 4$. Allora, poiché la (9) ci permette di trovare $I_n$ conoscendo $I_{n-1}$ e $I_{n-2}$, siamo riusciti a trovare una "scorciatoia" per trovare la successione $I_n$ apparentemente complicata definita in (1b): possiamo procedere ricorsivamente e scrivere

$$I_0 = 2,\ I_1 = 4,\ I_2 = -2\pi^2 + 24, I_3 = -24\pi^2 + 240,\ \text{ecc.} \tag{10}$$

6. Ora osserviamo che se $Q_{n-2}(x)$ e $Q_{n-1}(x)$ sono polinomi a coefficienti interi, anche

$$Q_n(x) = -x Q_{n-2}(x) + (4n-2) Q_{n-1}(x) \tag{11}$$

è un polinomio a coefficienti interi: la (11) definisce una sequenza infinita di polinomi a coefficienti interi che dipendono da $n$. Da un confronto con la (9) e con il punto 5 vediamo che se si assumono come polinomi di partenza (per definire ricorsivamente la successione) i polinomi $Q_0 = 2$ e $Q_1 = 4$, allora tutti i polinomi della successione (11) assumono in $\pi^2$ il valore $I_n$. Questo perché se $x = \pi^2$ e se il primo e secondo termine sono gli stessi, la (9) e la (11) rappresentano la stessa successione di numeri. In altre parole la successione di polinomi a coefficienti interi soddisfa

$$Q_n(\pi^2) = I_n \qquad (n \geqslant 2) \tag{12}$$

Nota che si tratta di una perfettamente lecita definizione ricorsiva: la successione infinita di polinomi con questa proprietà risulta ben definita dalla (11) e dalla particolare scelta dei polinomi iniziali. Possiamo ad esempio scrivere che i primi termini della successione sono: $Q_0 = 2$, $Q_1 = 4$, $Q_2 = -2x + 24$, $Q_3(x) = -24x + 240$, $Q_4(x) = 2x^2 - 360x + 3360$, ecc.

7. A questo punto supponiamo per assurdo che sia

$$\pi^2 = \frac{a}{b} \tag{13}$$

con $a, b \in \mathbb{N}$. Moltiplicando ambo i membri della (12) per $b^n$ possiamo scrivere

$$b^n I_n = b^n Q_n(\pi^2) \qquad (n \geqslant 2) \tag{14}$$

Ma l'$n$-esimo termine della successione di polinomi data dalla (11) e dai polinomi di partenza $Q_0 = 2$ e $Q_1 = 4$ non può avere grado maggiore di $n$ perché i primi due termini hanno grado zero e ogni volta che si aggiunge un termine il grado può aumentare al massimo di uno (nella (11) c'è una moltiplicazione per $x$). Allora $Q_n(\pi^2)$ in quanto polinomio a coefficienti interi con argomento $\frac{a}{b}$, ha denominatori tutti multipli di $b$ e tutti inferiori a $b^n$. In altre parole $b^n Q_n(\pi^2)$ è intero, e per la (14) concludiamo che

$$b^n I_n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant 2) \tag{15}$$

8. Ora osserviamo che l'integrale $I_n$ definito dalla (1b) deve essere minore dell'integrale della funzione costante in cui $P_n(x)$ e $\sin x$ assumono i valori massimi possibili. Derivando $P_n(x)$ si vede che se $x \in (0, \pi)$ (è il nostro caso visti gli estremi di integrazione) si ha un massimo in $x = \frac{\pi}{2}$, dove $P_n(x)$ assume valore $\frac{\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^n}{n!}$. Allora deve valere la

$$I_n < \int_0^\pi \frac{\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^n}{n!} dx \qquad (n \geqslant 2) \tag{16}$$

Moltiplicando ambo i membri per $b^n$ e integrando la funzione costante otteniamo poi

$$b^n I_n < \frac{\left(\frac{b\pi^2}{4}\right)^n}{n!} \pi \qquad (n \geqslant 2) \tag{17}$$

9. Per qualsiasi $b$ finito, la successione a destra nella (17) tende a zero al crescere di $n$. Il primo membro, essendo minore del secondo, fa altrettanto. Ma la (15) deve essere vera anche per gli $n$ grandi quindi siamo giunti a una contraddizione: una grandezza che può essere resa piccola a piacere (pur di scegliere $n$ sufficientemente grande) non può essere un intero (come imposto dalla (15)). Conclusione: l'ipotesi (13) che ci ha portato alle due conclusioni contraddittorie (15) e (17) non può essere vera: $\pi^2$ è irrazionale.

10. Supponiamo infine per assurdo che $\pi$ sia razionale e pari a $\frac{p}{q}$. Se così fosse avremmo che anche $\pi^2$ sarebbe razionale perché pari a $\frac{p^2}{q^2}$. Ma abbiamo visto nel passaggio 9 che $\pi^2$ è irrazionale. Ne concludiamo che $\pi$ è irrazionale (a scanso di equivoci può valer la pena si sottolineare che sebbene un numero razionale non può avere quadrato irrazionale, non vale il viceversa: un numero irrazionale può avere quadrato razionale, come ad esempio avviene con $\sqrt{2}$).

Infine due considerazioni mie.

i) Innanzitutto notiamo che riflettendo sul punto 10 possiamo concludere che abbiamo dimostrato qualcosa di più dell'irrazionalità di $\pi$. Poiché se un numero è irrazionale qualsiasi sua radice $n$-esima non può essere razionale, dall'irrazionalità di $\pi^2$ discende non solo l'irrazionalità di $\pi$, ma anche quella di tutti gli infiniti termini della successione $\{\pi^{\frac{2}{n}},\, n \in \mathbb{N}^+\}$. Quindi sono irrazionali i numeri

$$\sqrt{\pi}, \sqrt[3]{\pi}, \sqrt[4]{\pi}, \sqrt[5]{\pi}, \ldots \tag{18}$$

e anche i numeri

$$\sqrt[3]{\pi^2}, \sqrt[5]{\pi^2}, \sqrt[7]{\pi^2}, \ldots \tag{19}$$

Questa dimostrazione non ci dice però nulla sulla eventuale irrazionalità di moltissimi altri numeri interessanti, come ad esempio

$$\pi^3, \sqrt{\pi^3}, \pi^4, \pi^\pi, \pi^e, \pi^{\sqrt{2}}, \text{ ecc} \tag{20}$$

ii) In ultimo osserviamo che, anche se non lo abbiamo dimostrato, in effetti vale un risultato ancora più generale: non esiste alcun $k \in \mathbb{Q}^*$ (dove con $\mathbb{Q}^*$ denoto $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$) tale che $\pi^k$ è razionale. Se così fosse avremmo infatti $\pi = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{k}}$ e dunque $\pi$ sarebbe soluzione dell'equazione $bx^k - a = 0$ con $a, b \in \mathbb{N}$; ma questo è impossibile perché nel 1882 Lindemann dimostrato che $\pi$ è trascendente. Questo ci assicura che i primi tre termini nella (20) sono in effetti certamente irrazionali. Quanto agli altri tre termini elencati, nessuno sa a tutt'oggi se siano irrazionali o meno (ma *sappiamo* che $e^\pi$ è irrazionale, come mostrato dal Gelfond nel 1934), ed esiste ovviamente la possibilità che l'ingegno umano non sarà mai abbastanza creativo e potente da risolvere questi meravigliosi enigmi che la natura ci offre. Certamente una verità deve esistere, ed anche dei modi ingegnosi per pervenire ad essa, ma non possiamo escludere che queste vie siano al di là delle limitate capacità umane. Come hanno fatto notare molti scienziati del passato, riusciamo con gioia a scorgere alcuni frammenti di bellezza sulla spiaggia, ma l'oceano si stende ignoto davanti a noi.

*Anna a Frassineto Po*

11:07:33 del 30 giugno 2019