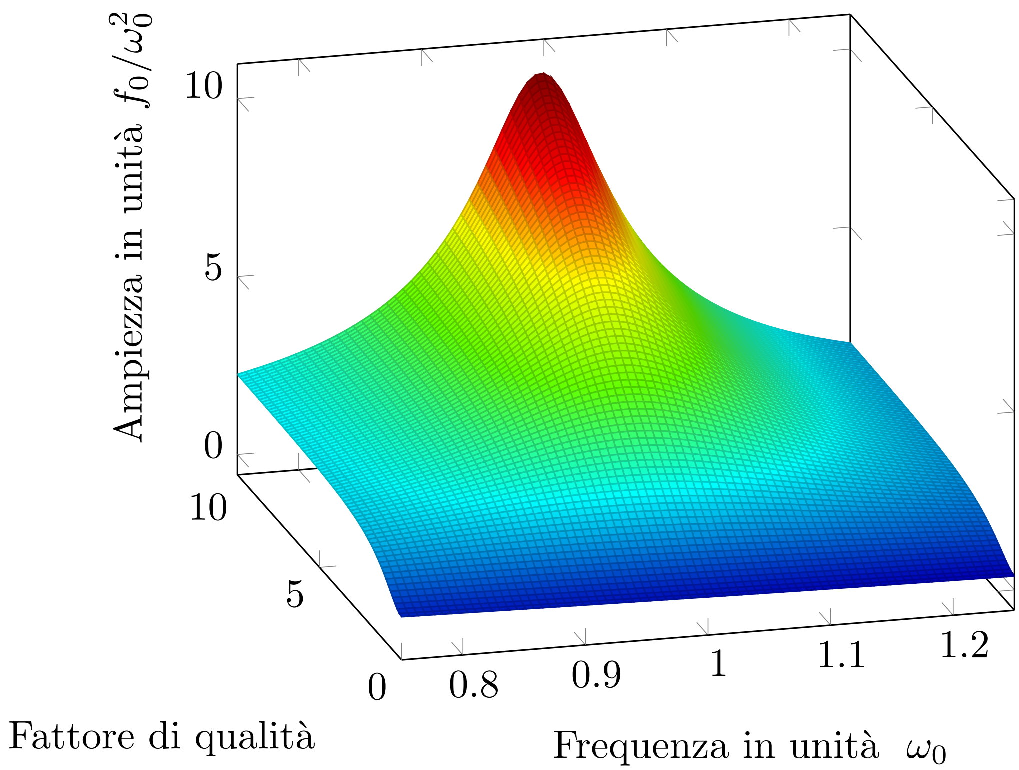
Oscillazioni

36 domande e risposte



Ringrazio Giuseppe Sottile per avere accolto nel suo sito il mio articolo (del quale comunque sono io il responsabile) e i lettori che dovessero segnalarmi eventuali inesattezze o passaggi poco chiari (usare `sitofausto@gmail.com`).

Questo articolo non sarebbe mai stato realizzato se non mi fossi imbattuto nello straordinario "Lezioni di Fisica Generale 1" di Luigi Ettore Picasso. Malgrado l'abbia trovato troppo "denso" e quindi di non facile lettura, è sicuramente tra i migliori libri su cui abbia mai studiato (come logica conseguenza non è più in commercio). Molto di quello che scrivo qui è tratto dal capitolo 11 di questo libro. Ho attinto anche dal delizioso "Theoretical mechanics" di Spiegel (anch'esso non più stampato). Ho comunque notato che in tutti questi ottimi libri si poneva l'accento quasi esclusivamente sullo studio del limite debolmente smorzato, mentre a costo di lavorare su conti un po' "pesanti", ho cercato di trattare il problema in modo molto generale e rinunciando ad approssimazioni e casi limite quando possibile (questi utili aspetti sono comunque stati trattati a parte). Dunque, sebbene devo molto alle letture, devo aggiungere che questo documento è ricco di risultati che mi sono trovato da solo, o che comunque ho riformulato e dimostrato a modo mio, impegnandomi a non omettere passaggi (inoltre in alcuni casi ho ritenuto opportuno essere ridondante con certi concetti).

Spero che il lettore trovi utile quanto ho scritto, che si chiarisca le idee e sciolga i suoi dubbi su argomenti spesso trattati troppo frettolosamente nei libri (la frequenza sollecitante che causa la risonanza è quella alla quale oscilla il sistema in assenza di sollecitazioni? Il moto del pendolo semplice è sempre periodico? Se credi che la risposta a queste domande sia affermativa, o se ad esempio non ti è chiaro il concetto di fattore di qualità, troverai l'articolo interessante). Soprattutto, spero che il lettore provi piacere a leggere quanto per me è stato un piacere scrivere (sebbene sia stato a tratti tormentoso il processo di assimilazione o elaborazione delle idee, è sempre una gioia quando i tasselli vanno al loro posto e si può contemplare una teoria come un bellissimo panorama).

In questi non proprio idilliaci anni venti, di minacce invisibili e minacce fin troppo visibili, nei quali il dovere ci chiama più che mai ad assumerci le nostre responsabilità e fare la nostra parte (quanto è ingiusto pretendere diritti dimenticandosi dei doveri!), e se necessario a fare sacrifici (senza dare ascolto a certi egoisti senza scrupoli, della cui pochezza l'Italia non ha bisogno, forti con i deboli e deboli con i forti), lo studio, la lettura, le gioie del pensiero, sono forse ancora più importanti che in anni più spensierati.

Per facilitare una eventuale stampa, ho utilizzato colori solo nel frontespizio e nella pagina finale.

Fausto Vezzaro, Cuasso al Monte, 7 maggio 2022

Lista dei simboli utilizzati

Per facilitare la lettura, elenco qui i principali simboli utilizzati. Qui e ovunque nell'articolo, ometterò l'aggettivo “angolare” alla frequenza, per rendere più scorrevole la lettura e perché non c'è pericolo di fare confusione: ogni volta che parlerò di frequenza mi riferirò a quella angolare.

T periodo (nei contesti in cui non è necessario distinguere fra periodo effettivo e periodo che si avrebbe in assenza di attriti)

$\widetilde{T}$ periodo

T_0 periodo che si avrebbe in assenza di attriti

l lunghezza del pendolo

g accelerazione di gravità

θ posizione angolare del pendolo

θ_0 posizione angolare iniziale del pendolo

ω frequenza (utilizzata in varie occasioni diverse, per la forza sollecitante o anche per il moto del sistema, nei contesti nei quali non è necessario distinguere fra ω_0 e $\widetilde{\omega}$)

ω_0 termine della descrizione canonica delle oscillazioni (frequenza che si avrebbe in assenza di attriti, come ad esempio avviene normalmente nello studio del pendolo semplice)

$\widetilde{\omega}$ frequenza con la quale oscilla il sistema

ω_{ris} frequenza di risonanza

τ termine della descrizione canonica delle oscillazioni (va a infinito nel limite in cui gli effetti dissipativi sono trascurabili)

F_0 ampiezza della forza sollecitante (se la descrizione si riferisce a un processo meccanico)

m massa del punto materiale oscillante (se la descrizione si riferisce a un processo meccanico)

f_0 termine della descrizione canonica delle oscillazioni (pari a $\frac{F_0}{m}$ se la descrizione si riferisce a un processo meccanico)

x perturbazione (può rappresentare la posizione, ma in generale anche l'angolo θ o altro, come la carica accumulata su un condensatore)

c rapporto tra i moduli di forza d'attrito e velocità

α, β, Q, γ, ξ parametri introdotti in (21) per rendere meno pesanti le notazioni

x_0, v_0 posizione iniziale e velocità iniziale della particella (in contesti non meccanici hanno altri significati)

ϕ costante di fase (a meno del segno)

$\overline{Q}$ fattore di qualità

$\langle E\rangle$, $\langle E_C\rangle$ Energia media ed energia cinetica media dell'oscillatore in un periodo

ΔE Variazione dell'energia dell'oscillatore debolmente smorzato in seguito a un'oscillazione

E Energia del sistema

$\boldsymbol{F}_{\text{est}}$ Risultante delle forze esterne agenti sulla particella

$\boldsymbol{v}$ velocità della particella

$\langle W\rangle_T$ potenza media dissipata in un periodo

Alcuni risultati che verranno utilizzati ma non dimostrati

Verranno utilizzati sviluppi di Taylor in (7b), in (17) e in alcuni altri punti. In [17] a pagina 16 si supporrà noto il concetto di valore medio di una funzione. Verranno sfruttate anche le identità trigonometriche in (7a) e (100)

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$\sin a\cos(a-b) = \frac{\sin(2a-b)+\sin b}{2}$$

senza soffermarsi sulla dimostrazione delle formule. In un caso verrà utilizzato un risultato più avanzato:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Non conosco la dimostrazione di questo elegante risultato, ma lo prenderemo per buono e lo utilizzeremo in una dimostrazione ingegnosa (direi addirittura tortuosa) e affascinante, giungendo alla bellissima formula (6) del periodo delle oscillazioni del pendolo (ideale) senza ipotizzare che le oscillazioni siano piccole.

Ci sono varie nozioni di fisica che si suppongono note: in particolare, ometteremo i passaggi di "traduzione" di un problema fisico in una equazione differenziale (l'applicazione delle leggi di Newton è abbondantemente descritta in letteratura e sul web). L'unico argomento "particolare", molto importante e interessante ma omesso nell'ordinario studio della fisica, è il teorema delle forze vive generalizzato, utilizzato in [17] a pagina 16 (dove si suppone anche che il lettore sappia che per gli oscillatori non smorzati, e quindi approssimativamente anche per gli oscillatori debolmente smorzati, l'energia cinetica media su un periodo è pari alla metà dell'energia totale).

Nota: i richiami alle equazioni saranno fra parentesi tonde (come da consolidata tradizione) mentre i richiami alle domande saranno fra parentesi quadre (di solito accompagnati dall'indicazione della pagina).

1 Com'è il moto del pendolo semplice nel caso limite delle piccole oscillazioni?

Teorema 1 (Pendolo semplice nel limite delle piccole oscillazioni)**.** Nel limite delle piccole oscillazioni il pendolo semplice si muove di moto armonico di periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ indipendente dall'ampiezza (purché piccola). Con una particolare scelta dell'origine dei tempi la legge oraria può ad esempio essere scritta

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\omega_0 t \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{1}$$

Dimostrazione. Dalle leggi di Newton sappiamo che l'equazione del moto del pendolo semplice è

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{2}$$

Questa equazione non si risolve con metodi elementari. Siccome però $\theta = 0$ è una posizione di equilibrio stabile, possiamo studiare le piccole oscillazioni attorno a questa posizione. Poiché per piccoli angoli $\sin\theta \approx \theta$ (purché ovviamente gli angoli siano misurati in radianti), l'equazione del moto diventa

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta \tag{3}$$

che è identica a quella dell'oscillatore armonico ($m\ddot{x} = -kx$), e ha come soluzione moti armonici. La legge oraria può allora indifferentemente essere scritta nella forma

$$x(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t \tag{4}$$

o nelle forme

$$x(t) = c\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{5a}$$

$$x(t) = d\sin(\omega_0 t + \psi) \tag{5b}$$

Sostituendo, è facile verificare che sono soluzioni dell'equazione differenziale (3). Con una opportuna scelta dell'origine dei tempi possiamo per esempio sempre scrivere la legge oraria nella forma (1).

- Nota che perché l'approssimazione $\sin\theta = \theta$ sia valida, si può imporre la condizione $\theta_0 \ll 1$ o, più precisamente, richiedere che $\theta_0^2 \ll 6$, che discende dal fatto che $\sin\theta \approx \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots$, e che si è scelto di trascurare gli infinitesimi di ordine superiore. Nota che usare θ (in radianti) al posto di $\sin\theta$ comporta un errore relativo di $\approx 10^{-3}$ per angoli di circa $6^\circ \approx 0,1$ rad.

- Nota che l'isocronismo del pendolo è molto famoso, ma in un certo senso possiamo parlare anche di isocronismo del sistema massa molla: nel limite delle piccole oscillazioni (cioè nell'ambito di validità della legge di Hooke) il periodo è $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ indipendente dall'ampiezza dell'oscillazione.

2 Quanto vale il periodo del pendolo soggetto a grandi oscillazioni?

Teorema 2 (Periodo del pendolo soggetto a grandi oscillazioni)**.** Detta θ_0 la posizione angolare estrema, il periodo del pendolo soggetto a grandi oscillazioni è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \sin^6\frac{\theta_0}{2} + \dots\right) \tag{6}$$

Dimostrazione. Nella dimostrazione faremo uso di queste identità matematiche:

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{7a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \dots \tag{7b}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\phi d\phi = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot(2n)}\cdot\frac{\pi}{2} \tag{7c}$$

Riscriviamo l'equazione del moto del pendolo:

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\sin\theta \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{8}$$

Ponendo $u = \dot{\theta}$ si ha $\ddot{\theta} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = u\frac{du}{d\theta}$ e la (8) diventa

$$u\frac{du}{d\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{9}$$

Integrando in θ si ha $\frac{u^2}{2} = \frac{g}{l}\cos\theta + c$. Se il pendolo parte da fermo nella posizione angolare θ_0 si ha che $u = 0$ quando $\theta = \theta_0$ quindi $c = -\frac{g}{l}\cos\theta_0$. Usando questa costante di integrazione si trova $u^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)$. E dunque, per come la u è stata definita, $\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$. Se consideriamo quella parte di moto che va da $\theta = \theta_0 > 0$ a $\theta = 0$, pari a un quarto di periodo, dobbiamo prendere il segno meno (θ diminuisce al crescere del tempo). Possiamo scrivere $dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}$. Integrando t da 0 a $\frac{T}{4}$ e θ tra θ_0 e 0 si ha $T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}$. Facendo uso dell'identità trigonometrica (7a) ottengo allora

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \tag{10}$$

Introduciamo ora la variabile ϕ, definita in modo da soddisfare l'equazione $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin\phi$. Considerando variazioni infinitesime di θ e ϕ possiamo riordinare in

$$d\theta = \frac{2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\cos\phi}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}d\phi \tag{11}$$

Inoltre osserviamo che se si introduce la variabile positiva $k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$ si ha che $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ (che è valida senza problemi di segno, perché senza perdita di generalità possiamo supporre che i θ fisicamente significativi siano compresi tra 0 e π, quindi assumere il coseno di $\frac{\theta}{2}$ positivo) diventa $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}$. Allora la (11) può essere scritta come $d\theta = \frac{2k\cos\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}d\phi$. Notiamo che, per come ϕ è stata definita, quando θ va da 0 a θ_0 si ha che ϕ va da 0 a $\frac{\pi}{2}$. Allora sostituendo $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ con $\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin^2\phi$ si ha che il denominatore nella (10) si può scrivere come $k|\cos\phi|$, e dunque come $k\cos\phi$. Sfruttando tutte queste osservazioni, vediamo che l'integrale assume la forma

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \tag{12}$$

Se le oscillazioni sono piccole $k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \to 0$ e $T \to 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, come deve essere. Sfruttando la (7b) con $x = -k^2\sin^2\phi$ abbiamo (nota che i termini della funzione integranda sono tutti positivi)

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\phi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\phi + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\phi + \dots\right)d\phi \tag{13}$$

Il problema si riduce quindi al calcolo di infiniti integrali della forma $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\phi d\phi$: sfruttando la (7c) si può effettuare l'integrazione, pervenendo alla

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots\right) \tag{14}$$

che è la tesi.

- La (6) può essere scritta in forma chiusa tramite la formula $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\right)^2\cdot\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2}$ (vedi anche [3] nella pagina seguente).
- Se $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$ dobbiamo supporre che il sostegno della massa puntiforme sia rigido (la corda si allenterebbe).

3 Il moto del pendolo semplice è sempre periodico?

- No.

Se $\theta_0 \to \pi$ si ha $\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2} \to 1$ indipendentemente da n. Allora la (6) diventa

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 + \dots\right) \tag{15}$$

Ma se $n \geqslant 1$ si ha $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot(2n)} = \frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}$, che vale 1 se $n = 0$. Allora il periodo (15) può essere scritto in forma chiusa come $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\right)^2$. Il criterio del rapporto e della radice sono inutili qui, tuttavia per valori grandi di n si ha $n! \sim \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$ (come scoperto dal matematico scozzese James Stirling nel giugno 1729, risultato prontamente comunicato al matematico francese de Moivre, che si occupava di problemi simili e con il quale teneva una corrispondenza) quindi si può mostrare che i termini si comportano asintoticamente come $\frac{1}{\pi n}$. Poiché la serie armonica è divergente, il periodo è infinito. Dietro questa matematica un po' sofisticata c'è un concetto fisico molto semplice: stiamo considerando il caso limite nel quale il pendolo si avvicina alla posizione di equilibrio superiore senza mai raggiungerla. Ovviamente in questo caso il filo deve essere sostituito da una sbarretta rigida (anch'essa di massa trascurabile) o si allenterebbe.

4 Come sono le prime formule approssimate per il periodo del pendolo?

Teorema 3 (Prime correzioni alla formula del periodo del pendolo)**.** Le prime due correzioni alla formula $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ per il periodo del pendolo sono

$$T \approx T_0\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2\right) \tag{16a}$$

$$T \approx T_0\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4\right) \tag{16b}$$

Dimostrazione. Ci rifacciamo alla formula (6): $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\sin^6\frac{\theta_0}{2} + \dots\right)$ e agli sviluppi di McLaurin

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^6}{1440} + \dots \tag{17a}$$

$$\sin^4\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{96} + \frac{x^8}{1280} + \dots \tag{17b}$$

Quindi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^6}{1440} + \dots\right) + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left(\frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{96} + \frac{x^8}{1280} + \dots\right) + \dots\right] \tag{18}$$

È allora evidente che se $x \to 0$, quello che sta fra le quadre tende a uno e che la prima correzione di cui occorre tenere conto è dovuta a x^2 ed è facilmente calcolabile. Il termine che moltiplica x^4 è evidentemente $\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{48} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\frac{1}{16}\right] = \frac{11}{3072}$.

- Con metodi simili si può ottenere $T \approx T_0\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3\,072}\theta_0^4 + \frac{173}{737\,280}\theta_0^6\right)$.

5 Qual'è il modo canonico di scrivere l'equazione dell'oscillatore smorzato forzato?

Definizione 1 (Equazione canonica delle oscillazioni)**.** Si definisce equazione canonica delle oscillazioni, l'equazione

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t \tag{19}$$

Definizione 2 (Equazione canonica omogenea delle oscillazioni)**.** Si definisce equazione omogenea canonica delle oscillazioni, l'equazione canonica delle oscillazioni con $f_0 = 0$:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{20}$$

Definizione 3 (Descrizione canonica dell'oscillatore smorzato forzato)**.** Descrivere in modo canonico l'oscillatore significa scegliere le variabili e riordinare i termini in modo che l'equazione differenziale che regola il fenomeno abbia la forma dell'equazione canonica delle oscillazioni (omogenea o meno a seconda dei casi).

- In caso di oscillazioni meccaniche con forza d'attrito direttamente proporzionale alla velocità, possiamo dire che le variabili che compaiono nella descrizione canonica hanno il seguente significato (vedi [9] a pagina 10 e [10] a pagina 11)

  $f_0 = \frac{F_0}{m}$ (dove F_0 è l'ampiezza della forza sinusoidale che sollecita e m la massa)

  $\tau = \frac{m}{c}$ (dove c, sia nel caso del sistema massa molla che nel caso del pendolo, è il rapporto tra i moduli di forza d'attrito e velocità)

  ω_0 è la frequenza propria con la quale il sistema oscillerebbe in assenza di attriti e di sollecitazione esterna ($\sqrt{\frac{k}{m}}$ in caso di sistema massa molla, $\sqrt{\frac{g}{l}}$ in caso di pendolo)

  ω è la frequenza della forza sinusoidale che sollecita il sistema (di ampiezza F_0)

Con opportune scelte delle costanti, lo studio di queste equazioni permette di descrivere un'ampia varietà di fenomeni al di fuori dal contesto meccanico nel quale sono emerse (ad esempio circuiti elettrici).

6 Qual'è il significato fisico dei parametri τ e ω_0 che compaiono nella descrizione canonica delle oscillazioni?

- Il parametro τ è un tempo tale che, se il sistema oscilla in assenza di sollecitazione esterna, il suo doppio coincide con il tempo necessario perché l'ampiezza dell'oscillazione si riduca di un fattore e, come descritto dalla (43). Fare tendere questo parametro a infinito corrisponde a imporre che l'ampiezza dell'oscillazione resti costante, cioè fa cadere nel caso di moto oscillatorio non smorzato, come d'altronde è evidente osservando l'equazione (20): se $\tau \to \infty$ otteniamo l'equazione dell'oscillatore semplice.
- Come si è già detto, il parametro ω_0 corrisponde alla frequenza con cui il sistema in questione oscillerebbe se non ci fosse sollecitazione esterna ($f_0 = 0$) e venissero azzerati gli effetti dissipativi (caso $\tau \to \infty$ appena discusso).
- Nota che parametri τ e ω_0 che compaiono nella descrizione canonica delle oscillazioni non possono essere negativi. Osservando le (32) e (37) si vede che per motivi fisici, tali parametri sono positivi (perché $c, k, m, g, l > 0$ per definizione). Ciò implica fra l'altro che anche $Q = \tau\omega_0 > 0$ sempre.

7 Com'è la soluzione dell'equazione canonica omogenea delle oscillazioni?

Teorema 4 (Soluzione dell'equazione canonica omogenea delle oscillazioni)**.** Fissate le condizioni al contorno $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, l'equazione canonica omogenea delle oscillazioni ammette soluzione tramite funzioni elementari. Per non rendere troppo pesanti le espressioni vengono definiti questi cinque parametri

$$\alpha \equiv \frac{x_0}{2} \tag{21a}$$

$$\beta \equiv \tau v_0 \tag{21b}$$

$$Q = \tau\omega_0 \tag{21c}$$

$$\gamma \equiv 4Q^2 \tag{21d}$$

$$\xi \equiv \frac{t}{2\tau} \tag{21e}$$

Si distinguono tre casi.

i) Se $Q = \frac{1}{2}$ (cioè $\gamma = 1$) si ha (moto criticamente smorzato):

$$x(t) = 2\left[\alpha(\xi + 1) + \beta\xi\right] e^{-\xi} \tag{22}$$

ii) Se $Q < \frac{1}{2}$ (cioè $\gamma < 1$) si ha (moto sovrasmorzato)

$$\begin{aligned} x(t) = &\frac{\alpha\left(\sqrt{1-\gamma}+1\right)+\beta}{\sqrt{1-\gamma}} \cdot \exp\left[\left(-1+\sqrt{1-\gamma}\right)\cdot\xi\right] + \\ &\frac{\alpha\left(\sqrt{1-\gamma}-1\right)-\beta}{\sqrt{1-\gamma}} \cdot \exp\left[\left(-1-\sqrt{1-\gamma}\right)\cdot\xi\right] \end{aligned} \tag{23}$$

iii) Se $Q > \frac{1}{2}$ (cioè $\gamma > 1$) si ha (moto oscillatorio sottosmorzato)

$$x(t) = 2\alpha \cdot \sqrt{\frac{\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{\gamma - 1} + 1} \cdot \sin\left[\arctan\left(\frac{\sqrt{\gamma-1}}{1+\frac{\beta}{\alpha}}\right) + \sqrt{\gamma-1}\cdot\xi\right]\exp(-\xi) \tag{24}$$

Dimostrazione. Si tratta di verificare che nei tre casi vengono soddisfatte le condizioni al contorno e l'equazione canonica omogenea delle oscillazioni (20)

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{25}$$

La verifica è molto laboriosa ma non presenta difficoltà in linea di principio.

- Nota che nelle espressioni la dipendenza dal tempo è contenuta in ξ.
- La (22) (moto criticamente smorzato) rappresenta un caso fisicamente poco interessante, perché richiede che le proprietà del sistema siano esattamente determinabili. È stato incluso per completezza ma in pratica si ricade sempre in uno degli altri due casi.
- Nel limite delle oscillazioni debolmente smorzate, Q coincide con il fattore di qualità $\overline{Q}$ (vedi [12] a pagina 13).
- Il problema del periodo, che si presenta solo nel caso del moto oscillatorio sottosmorzato (negli altri casi non ci sono oscillazioni, il sistema non torna mai in una posizione già occupata), è trattato in [8] nella pagina seguente.
- Si può osservare che o il corpo oscilla per sempre (moto sottosmorzato) o non oscilla neanche una volta (moto criticamente smorzato o sovrasmorzato). La possibilità che il corpo compia un numero finito di oscillazioni e poi si avvicini alla posizione di equilibrio senza riattraversarla più è esclusa.
- In questo teorema non risulta di una qualche utilità introdurre un parametro Q (si potrebbe pensare di omettere la (21c) e scrivere $\gamma = 4\tau^2\omega_0^2$), tuttavia conviene farlo per motivi che appariranno chiari (è collegato al fattore qualità tramite la (40) e talvolta semplifica le formule).

8 Com'è il periodo delle oscillazioni, nella soluzione dell'equazione canonica omogenea delle oscillazioni

Teorema 5 (Periodo delle oscillazioni nella soluzione dell'equazione canonica omogenea delle oscillazioni)**.** In caso di sistemi fisici descritti dall'equazione canonica omogenea delle oscillazioni, si avranno oscillazioni solo se $Q = \tau_0\omega_0 > \frac{1}{2}$. In tal caso il periodo è

$$\widetilde{T} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \tag{26}$$

dove $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ è il periodo corrispondente al caso limite $\tau \to \infty$ di assenza di attriti.

Dimostrazione. Da quanto visto in [7] nella pagina precedente, si hanno oscillazioni solo se $Q > \frac{1}{2}$: solo la (24) è "sinusoidale" (sia pure smorzata), le altre due sono combinazioni di esponenziali reali. Osservando la (24) si vede che l'argomento del seno è $\frac{\sqrt{4Q^2-1}}{2\tau}t$ sommata a un'espressione indipendente dal tempo. Il periodo deve allora soddisfare $\frac{\sqrt{4Q^2-1}}{2\tau} = \frac{2\pi}{\widetilde{T}}$ e dunque $\widetilde{T} = \frac{2\pi\tau}{Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$. Considerato che per definizione $Q = \tau\omega_0$, si trova $\widetilde{T} = \frac{\frac{2\pi}{\omega_0}}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$. Si osservi che nel caso limite $\tau \to \infty$ l'equazione canonica diventa l'equazione dell'oscillatore armonico (cioè fisicamente corrisponde al caso di assenza di smorzamento) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, che ha periodo $\frac{2\pi}{\omega_0}$. Siamo quindi giunti alla tesi.

- Nota che il periodo cresce se Q diminuisce, e diverge se $Q = \frac{1}{2}$, come deve essere, perché si è visto in [7] nella pagina precedente che se $0 < Q \leqslant \frac{1}{2}$ la soluzione dell'equazione canonica omogenea delle oscillazioni non è periodica.
- Se $Q \to \infty$ si ha $\widetilde{T} \to T_0$, fisicamente ciò corrisponde a un moto oscillatorio non smorzato, cioè al limite $\tau \to \infty$ al quale si accenna nell'enunciato. In tale limite Q va a coincidere con il fattore di qualità $\overline{Q}$, ovvero con il numero di oscillazioni che compie l'oscillatore prima che l'ampiezza sia ridotta di un fattore e, moltiplicato per π (vedi [12] a pagina 13).

Teorema 6 (Frequenza alla quale oscilla un oscillatore smorzato in assenza di sollecitazioni esterne)**.** In assenza di sollecitazioni esterne, un oscillatore in moto sottosmorzato oscilla con frequenza

$$\widetilde{\omega} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \tag{27}$$

dove ω_0 è la frequenza con cui il sistema oscillerebbe in assenza di attriti.

Dimostrazione. Corollario del teorema 5.

- Come si vede la frequenza con la quale oscilla un sistema smorzato è un po' minore di quella che si avrebbe in assenza di attriti (caso limite $Q = \tau\omega_0 \to \infty$ come discusso in [6] a pagina 8, che porta $\widetilde{\omega}$ a coincidere con ω_0). In questo caso la realtà coincide con ciò che detta anche l'intuizione: in presenza di attriti i moti diventano più lenti e quindi i tempi più lunghi (vedi anche [11] a pagina 12).

9 Come si studia il sistema massa molla smorzato da una forza d'attrito direttamente proporzionale alla velocità?

Teorema 7 (Legge oraria del sistema massa molla smorzato da una forza d'attrito direttamente proporzionale alla velocità)**.** Supponiamo che una massa m sia soggetta a una forza di richiamo direttamente proporzionale alla distanza dall'origine e a una forza d'attrito direttamente proporzionale alla velocità (siano k e c le rispettive costanti di proporzionalità). Se posizione e velocità della particella all'istante zero sono x_0 e v_0, il problema della posizione della particella in qualsiasi istante successivo ammette soluzione tramite funzioni elementari. Per non rendere troppo pesanti le espressioni vengono definiti questi quattro parametri

$$\alpha \equiv \frac{x_0}{2} \qquad \beta \equiv \frac{mv_0}{c} \qquad \gamma \equiv \frac{4mk}{c^2} \qquad \xi \equiv \frac{ct}{2m} \tag{28}$$

Si distinguono tre casi.

i) Se $c = 2\sqrt{mk}$ (cioè $\gamma = 1$) si ha (moto criticamente smorzato):

$$x(t) = 2\left[\alpha(\xi+1) + \beta\xi\right] e^{-\xi} \tag{29}$$

ii) Se $c > 2\sqrt{mk}$ (cioè $\gamma < 1$) si ha (moto sovrasmorzato)

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{\alpha\left(\sqrt{1-\gamma}+1\right)+\beta}{\sqrt{1-\gamma}} \cdot \exp\left[\left(-1+\sqrt{1-\gamma}\right)\cdot\xi\right] + \\ & \frac{\alpha\left(\sqrt{1-\gamma}-1\right)-\beta}{\sqrt{1-\gamma}} \cdot \exp\left[\left(-1-\sqrt{1-\gamma}\right)\cdot\xi\right] \end{aligned} \tag{30}$$

iii) Se $c < 2\sqrt{mk}$ (cioè $\gamma > 1$) si ha (moto oscillatorio sottosmorzato)

$$x(t) = 2\alpha \cdot \sqrt{\frac{\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{\gamma-1}+1} \cdot \sin\left[\arctan\left(\frac{\sqrt{\gamma-1}}{1+\frac{\beta}{\alpha}}\right) + \sqrt{\gamma-1}\cdot\xi\right]\exp(-\xi) \tag{31}$$

Dimostrazione. Dobbiamo cercare una funzione $x(t)$ che soddisfi la seconda legge di Newton, che in questo moto monodimensionale dice

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{32}$$

e che soddisfi le condizioni al contorno $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$. Da un confronto con l'equazione canonica (20) $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ si vede che nel nostro caso $\tau = \frac{m}{c}$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Si tratta del problema matematico già trattato in [7] a pagina 9 (qui abbiamo omesso Q a favore della sola γ).

• Nota che α e β sono parametri dimensionati (lunghezze) e dipendono anche dalle condizioni iniziali, mentre γ e ξ sono adimensionali e dipendono solo dalle caratteristiche fisiche del sistema (oltre che dal tempo, nel caso di ξ).

• Dalla (32) si vede che in assenza di attrito (cioè passando al limite $c \to 0$) ci si riduce al caso dell'oscillatore armonico $m\ddot{x} + kx = 0$ (quindi si trova il ben noto moto armonico).

• Il problema del periodo, che si presenta solo nel caso del moto oscillatorio sottosmorzato, è trattato in [11] nella pagina successiva.

10 Come si studia il pendolo semplice smorzato da una forza d'attrito direttamente proporzionale alla velocità del punto materiale in sospensione?

• Malgrado la forte analogia, il problema non è identico al problema massa molla trattato in [9] nella pagina precedente, perché in quel caso la forza di richiamo dipende solo dallo spostamento, mentre in questo caso dipende anche dalla massa (gravitazionale) del corpo, che compare nella legge di Newton per le sue proprietà di inerzia. In linea di principio il problema non è riconducibile dall'altro con un semplice cambio di variabili. Questo non significa che non sia possibile ricondursi al caso del sistema massa molla con un cambio di variabili (come in effetti è), ma solo che bisogna dimostrarlo (vedi teorema 8, nel quale si ricava la (37), che dimostra questa tesi: le due equazioni differenziali che regolano il moto sono identiche a meno di un cambio di variabili).

Teorema 8 (Legge oraria del pendolo soggetto a piccole oscillazioni e smorzato da una forza d'attrito direttamente proporzionale alla velocità)**.** Il problema del moto di un pendolo soggetto a piccole oscillazioni e smorzato da una forza d'attrito direttamente proporzionale alla velocità, ammette soluzione tramite funzioni elementari. Per non rendere troppo pesanti le espressioni vengono definiti questi quattro parametri

$$\alpha \equiv \frac{\theta_0}{2} \qquad \beta \equiv \frac{m\dot{\theta}_0}{c} \qquad \gamma \equiv \frac{4gm^2}{lc^2} \qquad \xi \equiv \frac{ct}{2m} \tag{33}$$

Per le soluzioni si distinguono tre casi

i) Se $\frac{c}{m} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}$ si ha (moto criticamente smorzato):

$$\theta(t) = 2\left[\alpha(\xi+1) + \beta\xi\right] e^{-\xi} \tag{34}$$

ii) Se $\frac{c}{m} > 2\sqrt{\frac{g}{l}}$ (moto sovrasmorzato)

$$\begin{aligned}\theta(t) =& \frac{\alpha\left(\sqrt{1-\gamma}+1\right)+\beta}{\sqrt{1-\gamma}} \cdot \exp\left[\left(-1+\sqrt{1-\gamma}\right)\cdot\xi\right] + \\ & \frac{\alpha\left(\sqrt{1-\gamma}-1\right)-\beta}{\sqrt{1-\gamma}} \cdot \exp\left[\left(-1-\sqrt{1-\gamma}\right)\cdot\xi\right]\end{aligned} \tag{35}$$

iii) Se $\frac{c}{m} < 2\sqrt{\frac{g}{l}}$ si ha (moto oscillatorio sottosmorzato)

$$\theta(t) = 2\alpha \cdot \sqrt{\frac{\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{\gamma-1} + 1} \cdot \sin\left[\arctan\left(\frac{\sqrt{\gamma-1}}{1+\frac{\beta}{\alpha}}\right) + \sqrt{\gamma-1}\cdot\xi\right] \exp(-\xi) \tag{36}$$

Dimostrazione. L'inizio della dimostrazione è analoga a quella ben nota del caso del pendolo semplice, prendendo però in considerazione il fatto che qui abbiamo la forza d'attrito. Scegliamo arbitrariamente un verso per l'ascissa curvilinea $s = l\theta$ con origine nel punto più basso. La forza attiva è $m\boldsymbol{g}$ e la sua componente tangenziale è $F_t = -mg\sin\theta$ (questa proiezione vale sia per angoli positivi che negativi: utilizzando le coordinate polari centrate nel punto fisso, possiamo considerare i due membri di questa equazione moltiplicati per $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, che funge da versore tangente alla curva orientata coincidente con la traiettoria del punto materiale). A questa forza va sommata la forza d'attrito, che può essere espressa dalla $-c\dot{s}\hat{\boldsymbol{\theta}}$. La $m\ddot{s} = F_t$ (componente tangenziale della seconda legge di Newton) è allora $m\ddot{s} = -mg\sin\theta - c\dot{s}$ (dove tutti i termini sono da intendersi moltiplicati per $\hat{\boldsymbol{\theta}}$). Tenuto conto che stiamo supponendo piccole le oscillazioni, possiamo allora riordinare in

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{37}$$

Tale equazione differenziale deve soddisfare le condizioni al contorno $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ (non usiamo il simbolo ω_0 perché normalmente usato per denotare un termine dell'equazione canonica, e non la velocità angolare istantanea all'istante zero). Da un confronto con l'equazione canonica (20) $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ si vede che nel nostro caso $\tau = \frac{m}{c}$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Si tratta del problema matematico già trattato in [7] a pagina 9 (qui abbiamo omesso Q a favore della sola γ).

• Dalla (37) si vede che in assenza di attrito (cioè passando al limite $c \to 0$) ci si riduce al caso dell'oscillatore armonico.

• Il problema del periodo, che si presenta solo nel caso del moto oscillatorio sottosmorzato, è trattato in [11] in questa pagina.

11 Com'è il periodo del moto oscillatorio smorzato nel caso del sistema massa molla e del pendolo?

• La risposta è nei teoremi 9 e 10 che seguono. Va sottolineato che in entrambi i casi il periodo è tanto più grande quanto maggiore è l'attrito e, fatto notevole e ben meno intuitivo, costante nel tempo.

Teorema 9 (Periodo in caso di sistema massa molla smorzato da una forza d'attrito direttamente proporzionale alla velocità)**.** Supponiamo che una massa m sia soggetta a una forza di richiamo direttamente proporzionale alla distanza dall'origine e a una forza d'attrito direttamente proporzionale alla velocità (siano k e c le rispettive costanti di proporzionalità). Il moto è oscillatorio solo se $c < 2\sqrt{mk}$, e in tal caso il periodo è

$$\widetilde{T} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{4mk}}} \tag{38}$$

dove $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ è il periodo in assenza di attrito.

Dimostrazione. Facendo riferimento alle formule del teorema in [9] a pagina 10, si vede che il punto materiale compie oscillazioni solo se siamo nel terzo caso ($c < 2\sqrt{mk}$), e che il tal caso il periodo $\widetilde{T}$ dovrà soddisfare la $\sqrt{\gamma - 1}\frac{c}{2m} = \frac{2\pi}{\widetilde{T}}$. È facile allora riordinare nella tesi.
Un modo equivalente di vedere la cosa, è considerare il fatto che in questo caso $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $Q = \tau\omega_0 = \frac{\sqrt{mk}}{c}$ (e facile vederlo confrontando la (32) con la descrizione canonica (20)) quindi [8] a pagina 10 porta alla tesi.

Teorema 10 (Periodo in caso di un pendolo smorzato da una forza d'attrito direttamente proporzionale alla velocità)**.** In caso di un pendolo semplice soggetto a piccole oscillazioni e smorzato da una forza d'attrito direttamente proporzionale alla velocità (c è il coefficiente di proporzionalità tra forza d'attrito e velocità del punto materiale). Il moto è oscillatorio solo se $c < 2m\sqrt{\frac{g}{l}}$, e in tal caso il periodo è

$$\widetilde{T} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{c^2 l}{4m^2 g}}} \tag{39}$$

dove $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ è il periodo in assenza di attrito.

Dimostrazione. Da un confronto tra le (32) e (37) si vede che il problema è analogo a quello del sistema massa molla nel quale si effettui la sostituzione $k \to \frac{mg}{l}$. Quindi la tesi discende dal teorema 9.
Un modo equivalente di vedere la cosa, è considerare il fatto che in questo caso $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ e $Q = \tau\omega_0 = \frac{m}{c}\sqrt{\frac{g}{l}}$ (e facile vederlo confrontando la (37) con la descrizione canonica (20)) quindi [8] a pagina 10 porta alla tesi.

12 Come è definito il fattore di qualità?

Definizione 4 (Fattore di qualità $\overline{Q}$)**.** Il fattore di qualità è il numero di oscillazioni che compie l'oscillatore prima che l'ampiezza sia ridotta di un fattore e, moltiplicato per π.

- In altre parole $\overline{Q}$ è definito in modo che, se vale π, ad ogni oscillazione del moto sottosmorzato l'ampiezza si riduce di un fattore e (in questa situazione il numero di oscillazioni che il sistema compie prima di ridurre l'ampiezza di un fattore e è 1: moltiplicando per π troviamo il fattore di qualità).
- In breve, più il fattore di qualità è grande più l'oscillatore è "di qualità", cioè poco smorzato: per oscillatore di bassa qualità intendiamo un oscillatore che si smorza subito.
- A questo punto la cosa migliore da fare è probabilmente riportare le parole di Picasso. "Il problema del pendolo poco smorzato è di estremo interesse in fisica: innumerevoli sono i sistemi che, almeno in prima approssimazione, sono descritti dall'equazione differenziale (20): dal pendolo, ai vari sistemi (meccanici e non) che compiono piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio in presenza di cause di smorzamento, ai circuiti elettrici contenenti resistenze, induttanze e condensatori (circuiti RLC), Laser, cavità risonanti, antenne che emettono onde elettromagnetiche, atomi eccitati che emettono luce, eccetera. In tutti questi casi (oscillatori in senso lato) [...] il fattore di qualità [...] misura la bontà dell'oscillatore, intendendo tanto migliore un oscillatore quanto meno è smorzato. [...] A titolo di esempio, l'ordine di grandezza di $\overline{Q}$ è di 10^2 per le vibrazioni sismiche della Terra; 10^3 per la corda di uno strumento a corde (pianoforte, violino, chitarra,...); 10^7 per un atomo e 10^{12} per un nucleo, intesi come oscillatori (o antenne) che emettono rispettivamente luce e raggi γ.

In tutti i casi in cui il sistema è descritto dalla (20), il termine responsabile dello smorzamento deriva dall'interazione del sistema con l'esterno: con l'aria nel caso del pendolo, con la cassa armonica nel caso degli strumenti a corde, con la parte della Terra non direttamente interessata dal terremoto nel caso delle onde sismiche; con le pareti della cavità nel caso delle cavità risonanti e del Laser, con il campo elettromagnetico in tutti gli altri casi citati, eccetera. Le interazioni con l'esterno provocano un trasferimento di energia dall'oscillatore (in senso lato) all'ambiente che lo circonda, e questo, più che il dettaglio delle forze "viscose", è l'aspetto generale del problema dello smorzamento. Per mettere in evidenza questa maggiore generalità, conviene esaminare il problema del pendolo smorzato anche dal punto di vista energetico" (a proposito di quest'ultimo punto vedi [17] a pagina 16).

13 Che relazione esiste tra fattore di qualità $\overline{Q}$ e il parametro Q che compare nella soluzione dell'equazione canonica omogenea delle oscillazioni

Teorema 11 (Relazione tra fattore di qualità $\overline{Q}$ e il parametro Q che compare nella soluzione dell'equazione canonica omogenea delle oscillazioni)**.** Tra fattore di qualità $\overline{Q}$ e il parametro Q che compare nella soluzione dell'equazione canonica omogenea delle oscillazioni sussiste la seguente relazione

$$\overline{Q} = \sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}} \tag{40a}$$

$$Q = \sqrt{\overline{Q}^2 + \frac{1}{4}} \tag{40b}$$

dove si suppone $Q > \frac{1}{2}$.

Dimostrazione. Osservando la (24) (l'unico dei tre casi per cui ha senso parlare di oscillazioni e fattore dei qualità è il terzo, per questo $Q > \frac{1}{2}$ non è limitativo) vediamo che l'ampiezza dell'oscillazione è la funzione esponenziale

$$x(t) = 2\alpha \cdot \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{\gamma - 1} + 1} \cdot \exp(-\xi) \tag{41}$$

dove ξ è una funzione del tempo. Se al tempo $t + \Delta t$ l'ampiezza si è ridotta di un fattore e si deve allora avere avere $x(t + \Delta t) = \frac{x(t)}{e}$, cioè $\exp(-\xi_{t+\Delta t}) = \exp(-\xi_t - 1)$ (dove il pedice indica l'istante in cui è calcolato ξ, che è stato introdotto con la (21e) come funzione di t) e quindi

$$1 = \xi_{t+\Delta t} - \xi_t \tag{42}$$

Dalla (21e) sappiamo che $\xi \equiv \frac{t}{2\tau}$ (dove τ è il parametro che compare nella descrizione canonica del sistema mostrata in [5] a pagina 8). Quindi $1 = \frac{t+\Delta t}{2\tau} - \frac{t}{2\tau}$ e il tempo Δt necessario perché l'ampiezza delle oscillazioni si riduca di un fattore e è

$$\Delta t = 2\tau \tag{43}$$

Dalla (26) sappiamo che il periodo dell'oscillazione è $\widetilde{T} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$. Se Δt è il tempo necessario perché l'oscillazione sia smorzata di un fattore e, il numero di oscillazioni necessarie perché ci sia lo smorzamento di un fattore e è $\frac{\Delta t}{\widetilde{T}}$, e quindi $\overline{Q} = \frac{\pi \Delta t}{\widetilde{T}}$ (discende dalla definizione 4 in [12] nella pagina precedente). Sostituendo perveniamo allora alla (40a). Il passaggio da questa alla (40b) può essere fatto elevando al quadrato, riordinando, ed estraendo la radice: non sorgono mai problemi di segno perché Q e $\overline{Q}$ sono positivi per definizione (e si ricordi che siamo nel caso $Q > \frac{1}{2}$).

• Naturalmente Q è grande se $\overline{Q}$ è grande, e in questo limite i due valori tendono a confondersi. Di fatto, i contesti in cui il concetto di fattore di qualità è utilizzato, stanno di solito in questo limite, nel quale la distinzione tra Q e $\overline{Q}$ è ininfluente (vedi anche [16] nella pagina successiva).

14 Entro quali valori può spaziare il fattore di qualità $\overline{Q}$?

• Nota bene che se il moto non è sottosmorzato il concetto di fattore di qualità non è definibile perché non è definito il periodo dell'oscillazione. Resta comunque definito in ogni caso il parametro $Q = \tau\omega_0$, dove τ e ω_0 sono ricavati dall'equazione del moto scritta in forma canonica. La fine dell'enunciato del teorema 11 nella pagina precedente non è solo un modo per non creare problemi con la (40a), è proprio un modo per esprimere il contesto nel quale ha senso parlare di fattore di qualità (in base a quanto visto in [7] a pagina 9 la condizione $Q > \frac{1}{2}$ è proprio quella che caratterizza la presenza di oscillazioni). Dal teorema 11 si vede inoltre che, poiché $Q > \frac{1}{2}$,

$$\overline{Q} > 0 \tag{44}$$

- Possiamo notare che Q e $\overline{Q}$ hanno un valore limite inferiore ma nessun limite superiore.
- $\overline{Q} \to 0$ è il limite di forti smorzamenti, $\overline{Q} \to \infty$ è il limite di deboli smorzamenti. In modo quasi uguale, sfruttando la (40b), possiamo dire che $Q \to \frac{1}{2}$ è il limite di forti smorzamenti, $Q \to \infty$ è il limite di deboli smorzamenti (vedi [16] in questa pagina).

15 Cosa si intende per oscillazioni debolmente smorzate?

Definizione 5 (Oscillazioni debolmente smorzate)**.** Si dice che un sistema oscillante è soggetto a oscillazioni debolmente smorzate se compie molte oscillazioni prima che queste siano apprezzabilmente smorzate (o, equivalentemente, se il fattore di qualità è molto grande).

- Se si vuole farlo, è immediato ricavare, sfruttando la (7b), la correzione al primo ordine per il periodo, dalle (38) e (39), cioè dalle $\widetilde{T} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{c^2}{4mk}}}$ e $\widetilde{T} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{c^2 l}{4m^2 g}}}$ (il limite debolmente smorzato corrisponde $c \to 0$, e ovviamente $\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$). Normalmente però in caso di oscillazioni debolmente smorzate è lecito identificare $\widetilde{T}$ con T_0 e si lavora semplicemente con il periodo che si ha in caso di assenza di attrito.

16 Nel limite debolmente smorzato che relazione esiste tra il fattore di qualità $\overline{Q}$ e il parametro Q che compare nella descrizione canonica delle oscillazioni (vedi [7] a pagina 9)?

- In generale sono due grandezze diverse, e non vanno confuse, ma nel limite dei sistemi debolmente smorzati (che è il caso che si affronta più di frequente) vanno a coincidere, come sancito dal teorema seguente

Teorema 12 (Fattore di qualità e limite delle oscillazioni debolmente smorzate)**.** Nel limite delle oscillazioni debolmente smorzate, il fattore di qualità $\overline{Q}$ e il parametro Q che compare nella descrizione canonica delle oscillazioni tendono a coincidere e a divergere

$$\overline{Q} = Q \qquad \overline{Q}, Q \to \infty \qquad \text{(nel limite delle oscillazioni debolmente smorzate)} \tag{45}$$

Dimostrazione. Per definizione di limite delle oscillazioni debolmente smorzate, in tale limite il periodo $\widetilde{T}$ va a coincidere con il periodo T_0 che si ha in assenza di smorzamento, quindi uno sguardo alla (26) $\widetilde{T} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$ mostra che tale limite coincide con la condizione

$$Q \to \infty \tag{46}$$

Dalla (40a) $\overline{Q} = \sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}$ si vede che in tale limite Q e $\overline{Q}$ vanno a coincidere, il che termina la dimostrazione.

- Allora concludiamo che, *se siamo nel limite di oscillazioni debolmente smorzate*, nel sistema massa molla smorzato e nel pendolo smorzato, i fattori di qualità $\overline{Q}$ valgono rispettivamente (basta calcolare $Q = \tau\omega_0$)

$$\overline{Q} \approx \frac{\sqrt{mk}}{c} \qquad \overline{Q} \approx \frac{m}{c}\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{47}$$

Ovviamente sono valori grandi perché nel limite debolmente smorzato c è piccolo.

- Quanto si è appena visto implica ad esempio che nel limite delle oscillazioni debolmente smorzate espressioni come

$$\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}} \qquad \sqrt{\overline{Q}^2 + \frac{1}{4}} \tag{48}$$

possono essere sostituite dalle espressioni più semplici $\overline{Q}$ o Q (indifferentemente l'una o l'altra) mentre espressioni come

$$\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \qquad \sqrt{\frac{4\overline{Q}^2 - 1}{4\overline{Q}^2 + 1}} \tag{49}$$

possono essere considerate unitarie.

17 Come si può esaminare il problema dell'oscillatore nel limite debolmente smorzato dal punto di vista energetico?

Teorema 13 (Fattore di qualità ed energia nel limite debolmente smorzato)**.** Nel limite debolmente smorzato, il fattore di qualità diviso per 2π è il rapporto tra l'energia media posseduta e quella dissipata dal sistema (e quindi trasferita all'esterno) in un periodo.

$$\frac{\overline{Q}}{2\pi} = \frac{\langle E \rangle}{\Delta E} \tag{50}$$

Dimostrazione. Applichiamo il teorema delle forze vive generalizzato applicato a un punto materiale in moto:

$$\frac{dE}{dt} = \boldsymbol{F}_{\text{est}} \cdot \boldsymbol{v} \tag{51}$$

dove E è l'energia del sistema, intesa come energia cinetica sommata all'energia potenziale interna (non ci sono forze conservative esterne e supponiamo conservative le forze interne, che nel nostro caso sono ad esempio dovute alla molla o al campo gravitazionale, che sono supposti facenti parte del sistema). Abbiamo $\boldsymbol{F}_{\text{est}} = -c\boldsymbol{v}$ e possiamo considerare la massa oscillante come una singola particella, priva di struttura (ignoriamo deliberatamente considerazioni microscopiche e in questo contesto supponiamo che l'energia "scompaia"). Quindi

$$\frac{dE}{dt} = -cv^2 \tag{52}$$

Come si è visto precedentemente, in caso di sistemi meccanici con forza d'attrito proporzionale alla velocità, la τ che compare nell'equazione canonica coincide con $\frac{m}{c}$ (dove m è la massa e c il coefficiente d'attrito). Isoliamo c e sostituiamo

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{\tau} E_c \tag{53}$$

In questa forma l'equazione non è molto espressiva, perché il secondo membro varia rapidamente nel tempo (sinusoidalmente come $\sin^2 \omega t$ cioè come $\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}$, in pratica con pulsazione 2ω). Sia $\langle E \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E dt$ il valore medio dell'energia su un periodo. Allora $\frac{d\langle E \rangle}{dt} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dE}{dt} dt$ e per la (53) abbiamo $\frac{d\langle E \rangle}{dt} = -\frac{2}{\tau}\left(\frac{1}{T}\int_0^T E_C dt\right)$, dunque

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = -\frac{2}{\tau}\langle E_C \rangle \tag{54}$$

Ricordando che per un oscillatore armonico non smorzato l'energia cinetica media su un periodo è uguale alla metà dell'energia totale (stiamo lavorando nel limite debolmente smorzato quindi il risultato deve essere valido anche nel nostro caso), possiamo scrivere

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau}\langle E \rangle \tag{55}$$

Abbiamo ottenuto un'equazione differenziale che ci permette di capire come cambia l'*energia media su un periodo* al variare del tempo (potremmo chiamarla semplicemente "l'energia dell'oscillatore" visto che nel limite di debole smorzamento nel quale siamo $\langle E \rangle$ varia sensibilmente solo in seguito a molte oscillazioni e quindi possiamo considerarla una grandezza ben definita ad un qualsiasi istante dato):

$$\langle E \rangle (t) = \langle E \rangle (0) e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{56}$$

cioè l'energia media decresce esponenzialmente con tempo di smorzamento τ. L'energia dissipata in un periodo è

$$\Delta E(t) = \langle E\rangle(t) - \langle E\rangle(t+T) = \langle E\rangle(0)e^{-\frac{t}{\tau}} - \langle E\rangle(0)e^{-\frac{t+T}{\tau}} = \langle E\rangle(0)e^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 - \langle E\rangle(0)e^{-\frac{T}{\tau}}\right) = \langle E\rangle(t)\left(1 - \langle E\rangle(0)e^{-\frac{T}{\tau}}\right) \tag{57}$$

Siamo nel limite debolmente smorzato quindi $c \to 0$ e $\tau = \frac{m}{c} \to \infty$, cioè $\tau \gg T$. Allora si ha $e^{-\frac{T}{\tau}} \approx 1 - \frac{T}{\tau}$, e quindi a un qualsiasi istante t

$$\Delta E = \langle E\rangle \frac{T}{\tau} \tag{58}$$

Siamo nel limite debolmente smorzato quindi la pulsazione è circa ω_0 e $Q = \tau\omega_0$ è circa uguale al fattore di qualità $\overline{Q}$. Dalla $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ giungiamo allora a $\frac{\tau}{T} = \frac{\overline{Q}}{2\pi}$, e quindi alla tesi (50).

• La (56) è caratteristica di tutti i sistemi dissipativi descritti da un'equazione lineare della forma canonica omogenea (20): $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. In generale τ è detto *tempo di rilassamento* del sistema.

• Come ci si poteva aspettare, quando il fattore di qualità è grande la variazione relativa di energia del sistema, in una oscillazione, è piccola.

• Nota che in caso di strumenti musicali il fattore di qualità non può essere troppo grande, per evitare che l'oscillazione prosegui per lungo tempo senza trasferimento di energia all'esterno, e dunque per evitare che il suono risulti troppo debole (d'altro canto, se è molto piccolo il suono si smorza immediatamente quando termina la sollecitazione, e anche questo potrebbe in certi casi non essere desiderabile).

18 Cosa si intende per oscillatore forzato?

• A causa dell'inevitabile smorzamento, il pendolo, il sistema massa molla, o qualsiasi altro sistema descritto da un'equazione della forma canonica omogenea (20) $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$, non può mantenere indefinitamente il suo moto se un sistema esterno non fornisce all'oscillatore l'energia che perde ad ogni periodo. Occorre allora una forza dipendente dal tempo, che supporremo periodica.

Definizione 6 (Oscillatore forzato)**.** Un oscillatore forzato è un sistema il cui moto è descritto da un'equazione differenziale della forma

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = F(t) \tag{59}$$

dove A, B e C sono costanti, e dove $F(t)$ è una funzione periodica, cioè tale che $F(t) = F(t+T)$.

• Un sistema descrivibile tramite l'equazione canonica delle oscillazioni è un particolare oscillatore forzato (di particolare importanza, come mostrato in [19] in questa pagina).

19 Perché è importante il problema dell'oscillatore armonico sollecitato da una forza sinusoidale?

• Senza grande perdita di generalità, possiamo assumere che la $F(t)$ della (59) sia della forma

$$F(t) = F_0 \sin\omega t \qquad F_0 > 0 \tag{60}$$

Vale la pena di studiare a fondo il caso in cui la sollecitazione esterna abbia forma data dalla (60), infatti

i) Sappiamo che ogni funzione periodica di periodo T può essere espressa come combinazione lineare di funzioni trigonometriche (analisi di Fourier).

ii) La (59) è lineare. Cioè se $x_1(t)$ è soluzione con $F = F_1(t)$ e $x_2(t)$ è soluzione con $F = F_2(t)$, allora $x_1(t)+x_2(t)$ è soluzione con $F = F_1(t) + F_2(t)$ (infatti sommando le prime due equazioni differenziali si ottiene la terza equazione differenziale).

iii) Mediante opportuna scelta dell'origine dei tempi e dell'orientamento dell'asse x, una funzione sinusoidale può sempre essere scritta nella forma (60) (l'assenza di costante di fase e l'imposizione $F_0 > 0$ non pregiudicano significativamente la generalità).

20 Come si può scrivere la soluzione generale del problema dell'oscillatore smorzato forzato da una forza sinusoidale?

Teorema 14 (Soluzione generale dell'equazione differenziale)**.** La soluzione generale dell'equazione (19):

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t \tag{61}$$

è scrivibile come somma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata, e di una soluzione particolare dell'equazione completa.

Dimostrazione. Consideriamo una funzione $x(t) = x_o(t)+x_p(t)$ dove $x_o(t)$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, mentre $x_p(t)$ è una soluzione particolare della non omogenea (61). È immediato constatare che $x(t)$ è soluzione della (61) (basta sommare la $\ddot{x}_o + \frac{1}{\tau}\dot{x}_o + \omega_0^2 x_o = 0$ con la $\ddot{x}_p + \frac{1}{\tau}\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = f_0 \sin \omega t$ e sfruttare il fatto che l'operazione di derivazione è lineare: $\ddot{x}_o + \ddot{x}_p = \ddot{x}$, ecc.). Ma osserviamo che $x(t)$ contiene due costanti arbitrarie (portate della funzione dalla $x_o(t)$). Concludiamo che $x(t)$ è soluzione generale dell'equazione differenziale del secondo ordine (61), in quanto funzione contenente due costanti arbitrarie che sostituita nell'equazione la rendono vera.

- Poiché le soluzioni della omogenea si annullano quando $t \to \infty$, la soluzione particolare del teorema 14 è ben determinata (tutte le altre soluzioni dipendono dalle condizioni al contorno e tendono alla $x_p(t)$ per tempi lunghi). In altre parole $x_p(t)$ deve coincidere con il moto a regime (vedi anche considerazioni in [21] in questa pagina).

21 Qual'è il moto a regime (dopo il transiente) di un oscillatore smorzato forzato da una forza sinusoidale?

- La (61) non è altro che la (19) introdotta per descrivere in modo generale e semplice il problema dell'oscillazione smorzata forzata. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata (vedi [7] a pagina 9), cioè della $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, è poco interessante se siamo interessati al comportamento a regime, perché si smorza col tempo fino (praticamente) ad annullarsi, indipendentemente dalle condizioni iniziali. Quindi se troviamo una soluzione periodica dell'equazione (61), essa *deve* rappresentare il moto a regime. La determineremo in [22] in questa pagina.
- Mettere in relazione la soluzione generale della (61) a specifiche condizioni al contorno è probabilmente proibitivo (l'ho fatto, ma le espressioni non hanno una forma decente). Questo però non è un problema perché di solito si è interessati al comportamento a regime, e per quanto appena visto tale comportamento deve coincidere con la soluzione periodica della (61) (l'intuizione fisica ci induce a pensare che tale soluzione periodica deve esistere ed essere unica). In altre parole, ovviamente esistono infinite soluzioni, ma noi siamo interessati alla soluzione particolare che descrivere il moto a regime, quindi cerchiamo una soluzione che non si annulli per tempi grandi: più esattamente, visto che la sollecitazione è periodica, ci aspettiamo una soluzione periodica. Ipotizzeremo in [22] in questa pagina che tale soluzione sia sinusoidale, confermando alla fine della dimostrazione che l'ipotesi di partenza era giusta.

22 Qual'è la soluzione periodica dell'equazione $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t$?

- Per come è scritta, la domanda presuppone che la soluzione periodica esista e sia unica. Noi dimostreremo solo che esiste.

Teorema 15 (Soluzione periodica dell'equazione canonica delle oscillazioni)**.** L'equazione canonica delle oscillazioni $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t$ (con $f_0 > 0$) ammette come soluzione periodica la funzione

$$x(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}} \sin\left(\omega t - \arccos\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}}\right)\right) \tag{62}$$

se $\omega \neq \omega_0$, e

$$x(t) = -\frac{f_0\tau}{\omega_0}\cos(\omega t) \tag{63}$$

se $\omega = \omega_0$.

Dimostrazione. Partiamo dalla non irragionevole ipotesi che a regime il moto sarà sinusoidale (alla fine troveremo effettivamente una soluzione a partire da questa ipotesi, che quindi è giusta) e imponiamo che la costante moltiplicativa x_0 sia positiva (non è illecito: l'imposizione del segno di x_0 non pregiudica la generalità perché la fase ϕ è libera, è un'incognita da determinarsi che terrà conto dell'imposizione)

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t - \phi) \qquad (\text{con } x_0 > 0) \tag{64}$$

Sfruttando identità trigonometriche e facendo derivate, scriviamo

$$x(t) = x_0(\sin\omega t\cos\phi - \cos\omega t\sin\phi) \tag{65a}$$

$$\dot{x}(t) = x_0\omega(\sin\omega t\sin\phi + \cos\omega t\cos\phi) \tag{65b}$$

$$\ddot{x}(t) = -x_0\omega^2(\sin\omega t\cos\phi - \cos\omega t\sin\phi) \tag{65c}$$

Quindi, dall'equazione differenziale, vediamo che se la (64) è soluzione per qualsiasi istante t, allora deve essere soddisfatto il sistema (i coefficienti di $\sin\omega t$ e $\cos\omega t$ devono essere nulli)

$$\begin{cases} -\omega^2\cos\phi + \dfrac{\omega}{\tau}\sin\phi + \omega_0^2\cos\phi = \dfrac{f}{x_0} & (66a) \\ \omega^2\sin\phi + \dfrac{\omega}{\tau}\cos\phi - \omega_0^2\sin\phi = 0 & (66b) \end{cases}$$

Dalla (66b) abbiamo (il caso particolare $\omega_0 = \omega$ va trattato a parte, vedi fine della dimostrazione)

$$\sin\phi = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\phi \tag{67}$$

E sostituendo nella (66a) otteniamo

$$\cos\phi = \frac{f_0}{x_0}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega/\tau)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \tag{68}$$

Sostituendo la (68) nella (67) otteniamo poi

$$\sin\phi = \frac{f_0}{x_0}\frac{\omega/\tau}{(\omega/\tau)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \tag{69}$$

positivo perché per ipotesi $x_0, f_0 > 0$. Dall'equazione fondamentale della trigonometria $1 = \sin^2\phi + \cos^2\phi$ abbiamo

$$1 = \frac{f_0^2}{x_0^2\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2\right]^2}\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2\right] \qquad \Rightarrow \qquad x_0^2 = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \tag{70}$$

Allora, considerato che $x_0, f_0 > 0$ per ipotesi,

$$x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}} \tag{71}$$

Ma se $\frac{f_0}{x_0} = \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}$ possiamo sostituire nelle (69) e (67) ottenendo

$$\sin\phi = \frac{\omega/\tau}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}} \tag{72a}$$

$$\cos\phi = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}} \tag{72b}$$

La (72a) ci dice che $\sin\phi > 0$ quindi $0 < \phi < \pi$. Poiché la funzione arccos è definita proprio in modo da restituire valori compresi tra 0 e π, è comodo utilizzare la (72b) per definire ϕ, come si fa nella (62), che dunque rappresenta l'equazione del moto (come ulteriore verifica si può sostituire la (62) nell'equazione differenziale: si troverà un'identità). Tutto ciò mostra che l'ipotesi di partenza che la soluzione particolare cercata fosse sinusoidale era buona.
Evidentemente nel caso particolare $\omega = \omega_0$ l'equazione (62) restituisce $x(t) = \frac{f_0\tau}{\omega_0}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, e dunque la (63). Equivalentemente possiamo notare che se $\omega = \omega_0$, dalla (66b) abbiamo $\phi = \frac{\pi}{2}$ che con la (66a) ci dice $x_0 = \frac{f_0\tau}{\omega_0}$. Sostituendo nella (64) si perviene alla (63).

- Possiamo notare che poiché $\frac{f_0\tau}{\omega_0} > 0$ (è il valore assunto da x_0 in questo caso particolare), abbiamo che se $\omega = \omega_0$ al tempo zero la perturbazione è negativa.

23 Come si può trovare una soluzione particolare periodica dell'equazione $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t$ sfruttando l'analisi complessa?

• Al prezzo di un poco di astrazione in più, l'analisi complessa può rendere i calcoli più veloci. Come in [22] a pagina 18 supponiamo che la soluzione sia sinusoidale. Cercando di essere il più generali possibili, non diamo però per scontata nemmeno l'ipotesi che la frequenza a regime sia la stessa della forza sollecitante (nella funzione incognita useremo α e non ω: poi dimostreremo che $\alpha = \omega$).
Scriviamo la soluzione incognita $x_0 \sin(\alpha t - \phi)$ come parte immaginaria della funzione complessa $z(t) = x_0 e^{i(\alpha t - \phi)}$. Inoltre, poiché consideriamo le parti immaginarie, sostituiamo $\sin \omega t$ con $e^{i\omega t}$. Allora sostituendo nell'equazione differenziale troviamo

$$x_0 \left[(\omega_0^2 - \alpha^2) + i\frac{\alpha}{\tau}\right] e^{i(\alpha t - \phi)} = f_0 e^{i\omega t} \tag{73}$$

Deve valere per ogni t, e in particolare per $t = 0$, quindi $x_0 \left[(\omega_0^2 - \alpha^2) + i\frac{\alpha}{\tau}\right] = f_0 e^{i\phi}$, che usata con la (73) restituisce

$$f_0 e^{i\phi} e^{i\alpha t - \phi} = f_0 e^{i\omega t} \tag{74}$$

da cui concludiamo che $\alpha = \omega$. Dunque possiamo concludere che

$$x_0 \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}\right] = f_0 e^{i\phi} \tag{75}$$

Eguagliando le parti reali e quelle immaginarie troviamo

$$\begin{cases} f_0 \sin \phi = x_0 \frac{\omega}{\tau} \\ f_0 \cos \phi = x_0(\omega_0^2 - \omega^2) \end{cases} \tag{76}$$

dall'equazione fondamentale della trigonometria, considerato che $x_0, f_0 > 0$ per ipotesi, troviamo allora la (71). E dunque, sfruttando ancora le (76), otteniamo le (72).

• Notare che con questo metodo non siamo dovuti passare per la formula che permette di spezzare il seno della differenza, come nelle (65). Si fa uso di una matematica un po' più astratta, ma meno macchinosa.

24 Qual'è il moto a regime di un oscillatore forzato da una forza sinusoidale nel caso limite di assenza di attriti?

Teorema 16 (Moto a regime in assenza di dissipazioni)**.** Nel caso limite di assenza di attriti, il moto a regime regolato dall'equazione canonica delle oscillazioni è dato da

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \tag{77}$$

Dimostrazione. In base a quanto visto in [6] a pagina 8 il caso limite di assenza di attriti coincide con $\tau \to \infty$. Allora la (62) restituisce

$$x(t) = \frac{f_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \sin\left(\omega t - \arccos\left(\operatorname{sgn}(\omega_0^2 - \omega^2)\right)\right) \tag{78}$$

Se $\omega = \omega_0$ la risposta a regime diverge (ma si badi bene che stiamo ipotizzando l'assenza di attriti): non è sorprendente e non c'è altro da dire su questo caso irrealistico. Se $\omega \neq \omega_0$ l'arcoseno restituisce 0 se $\omega < \omega_0$ e π se $\omega > \omega_0$. Allora $x(t) = \frac{f_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \sin(\omega t)$ se $\omega < \omega_0$ e $x(t) = \frac{f_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|} (-\sin(\omega t))$ se $\omega > \omega_0$. Più brevemente $x(t) = \frac{f_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \sin(\omega t) \operatorname{sgn}(\omega_0 - \omega)$, e dunque $\frac{f_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \sin(\omega t) \operatorname{sgn}(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$, dove si è sfruttato $\frac{\operatorname{sgn} x}{|x|} = \frac{\frac{x}{|x|}}{|x|} = \frac{x}{|x|^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

• Dunque nel limite di attriti trascurabili, la perturbazione va nel tempo come la forza sollecitante (massimi e minimi agli stessi istanti) e con ampiezza che cresce o diminuisce a seconda che ω sia vicina a ω_0 o meno (diverge se $\omega = \omega_0$).

25 Cosa si intende per risonanza, frequenza di risonanza e frequenza propria?

Definizione 7 (Risonanza)**.** La risonanza è un fenomeno fisico che si verifica quando un sistema oscillante forzato viene sottoposto a una specifica sollecitazione periodica (di frequenza diversa a seconda del sistema) con effetto di massimizzare l'ampiezza dell'oscillazione stessa.

Definizione 8 (Frequenza di risonanza)**.** La frequenza di risonanza è la frequenza $\omega_{\rm ris}$ della sollecitazione periodica che massimizza l'ampiezza dell'oscillazione del sistema.

Definizione 9 (Frequenza propria)**.** La frequenza propria è la frequenza $\widetilde{\omega}$ con la quale il sistema oscilla quando non è soggetto a forze esterne (e non è a riposo).

• La frequenza di risonanza e la frequenza propria non vanno confuse con la ω_0 che compare nell'equazione canonica. Nel limite dei piccoli smorzamenti le tre grandezze vanno a coincidere, ma in linea di principio sono diverse.
Nota che la frequenza ω_0 è la frequenza con la quale il sistema *oscillerebbe* in assenza di sollecitazioni esterne se non fossero presenti dissipazioni (nel caso limite $\tau \to \infty$ l'equazione canonica omogenea delle oscillazioni diventa l'equazione dell'oscillatore armonico), mentre la frequenza propria $\widetilde{\omega}$ è la frequenza alla quale effettivamente il sistema oscilla quando è libero di oscillare in assenza di sollecitazioni esterne.

• Va sottolineato che è corretto parlare di risonanza anche quando la frequenza della forza sollecitante è diversa dalla frequenza propria del sistema (vedi [28] nella pagina successiva). Insistiamo nel ribadire che in generale $\omega_{\rm ris}$, $\widetilde{\omega}$ e ω_0 sono frequenze distinte (la frequenza ω della sollecitazione è una quarta frequenza che compare nel problema, ovviamente arbitraria e completamente indipendente dalle altre, che invece sono collegate fra loro dalle caratteristiche del sistema).

26 I concetti di frequenza propria e frequenza di risonanza sono ben definiti, nel senso che sono indipendenti dall'ampiezza dell'oscillazione?

• Si e no. Fintantoché il sistema è descritto da un'equazione della forma dell'equazione canonica omogenea delle oscillazioni, il suo periodo è dato dalla (26), e sia T_0 che Q sono caratteristiche del sistema (indipendenti dall'ampiezza dell'oscillazione). D'altro canto se le perturbazioni diventano grandi dobbiamo aspettarci che l'equazione differenziale che regola il fenomeno diventi più complicata, e quindi prendere in considerazione la possibilità che la frequenza propria dipenda dall'ampiezza dell'oscillazione (come avviene nel caso del pendolo soggetto a grandi oscillazioni). Considerazioni analoghe possono essere fatte per la frequenza di risonanza.

27 In caso di oscillatore smorzato forzato da una forza sinusoidale, qual'è la frequenza di risonanza?

• Nota che nel teorema seguente *non* si suppone di essere nel limite debolmente smorzato.

Teorema 17 (Frequenza di risonanza a regime, in caso di oscillatore smorzato forzato da una forza sinusoidale)**.** La frequenza alla quale si ha risonanza è

$$\omega_{\rm ris}(Q) = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \tag{79a}$$

$$\omega_{\rm ris}(\overline{Q}) = \omega_0 \sqrt{\frac{4\overline{Q}^2 - 1}{4\overline{Q}^2 + 1}} \tag{79b}$$

dove $Q = \tau\omega_0$ (maggiore di $\frac{1}{\sqrt{2}}$ in questo caso) è quello della (21c), e $\overline{Q}$ è il fattore di qualità (definito in [12] a pagina 13 e maggiore di $\frac{1}{2}$ in questo caso).

Dimostrazione. In base a quanto visto in [20] a pagina 18, a regime l'oscillazione sarà descritta dalla (62):

$$x(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}} \sin\left(\omega t - \arccos\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}}\right)\right) \tag{80}$$

Noi siamo qui interessati all'ampiezza

$$x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}} \tag{81}$$

si ha

$$\frac{dx_0}{d\omega} = \frac{f_0\omega[2(\omega_0^2 - \omega^2) - 1/\tau^2]}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{82}$$

che è positiva se $0 < \omega < \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2\omega_0^2\tau^2}}$ è negativa per $\omega > \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2\omega_0^2\tau^2}}$, cioè la (79a) è la frequenza corrispondente alla massima ampiezza (si ricordi che per definizione $Q = \tau\omega_0$). Sfruttando la (40b) $Q = \sqrt{\overline{Q}^2 + \frac{1}{4}}$ si ottiene allora la (79b).

• Le precisazioni nell'enunciato del teorema sono dovuti al fatto che la frequenza di risonanza è definita solo se $\overline{Q} > \frac{1}{2}$ e se $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Questo non è sorprendente alla luce di quanto trattato in [31] a pagina 24.

28 La frequenza di risonanza coincide con la frequenza propria?

• No.
Ciò è vero approssimativamente solo nel caso limite di oscillazioni debolmente smorzate (cioè quasi sempre, visto che tipicamente i sistemi studiati hanno un grande fattore di qualità). In tale limite si ha (vedi [6] a pagina 8) $Q = \tau\omega_0 \to \infty$, e quindi la (83a) restituisce $\omega_{\rm ris} = \widetilde{\omega}$ (entrambe vanno a coincidere con la frequenza ω_0 che caratterizza l'oscillazione in assenza di attriti).

Teorema 18 (Relazione tra frequenza di risonanza e frequenza propria)**.** Tra la frequenza di risonanza $\omega_{\rm ris}$ e la frequenza propria $\widetilde{\omega}$ sussistono le relazioni

$$\omega_{\rm ris} = \widetilde{\omega}\sqrt{\frac{Q^2 - \frac{1}{2}}{Q^2 - \frac{1}{4}}} \tag{83a}$$

$$\omega_{\rm ris} = \widetilde{\omega}\sqrt{1 - \frac{1}{4\overline{Q}^2}} \tag{83b}$$

dove $Q = \tau\omega_0$ (maggiore di $\frac{1}{\sqrt{2}}$ in questo caso) è quello della (21c), e $\overline{Q}$ è il fattore di qualità (definito in [12] a pagina 13 e maggiore di $\frac{1}{2}$ in questo caso).

Dimostrazione. In assenza di sollecitazioni esterne, un oscillatore smorzato oscilla con frequenza (27) $\widetilde{\omega} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. Facendo il rapporto con la (79a) si perviene alla (83a). Per ottenere la (83b) basta sfruttare la (40b).

• Le precisazioni nell'enunciato del teorema sono dovuti al fatto che la frequenza di risonanza è definita solo se $\overline{Q} > \frac{1}{2}$ e se $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Questo non è sorprendente alla luce di quanto trattato in [31] a pagina 24.

29 Nel limite debolmente smorzato, qual'è la correzione al primo ordine apportata dalla finitezza del fattore qualità, alla frequenza di risonanza in funzione di $\widetilde{\omega}$?

Teorema 19 (Prima correzione alla frequenza di risonanza nel limite debolmente smorzato)**.** Nel limite debolmente smorzato la frequenza di risonanza tende a coincidere con la frequenza propria $\widetilde{\omega}$. La correzione al primo ordine dovuta alla finitezza del fattore di qualità è data da

$$\omega_{\mathrm{ris}}(\overline{Q}) \sim \widetilde{\omega}\left(1 - \frac{1}{8\overline{Q}^2}\right) \tag{84}$$

Dimostrazione. La prima frase dell'enunciato è ovvia, basta ricordarsi che nel limite debolmente smorzato $Q, \overline{Q} \to \infty$, e fare dei limiti nelle (83). Per la seconda parte bisogna fare dei conti. Sostituendo $\overline{Q}$ con $\frac{1}{x}$ nelle (83b), sviluppando attorno a $x = 0$ e risostituendo x con $\frac{1}{\overline{Q}}$, si trova la (84), che dunque rappresenta il comportamento asintotico per $\overline{Q}$ grande.

30 Come si può rappresentare graficamente in modo efficiente il fenomeno della risonanza con un grafico?

• Nota che nel teorema 20 $\overline{Q}$ è il fattore di qualità (definizione 4 a pagina 13), e che ω_0 non è, strettamente parlando, la frequenza propria del sistema (cioè quella alla quale oscilla in assenza di sollecitazioni esterne), bensì la frequenza propria che si avrebbe se non fossero presenti attriti. Tale frequenza *non* è la frequenza con la quale oscilla spontaneamente il sistema che stiamo studiando (in assenza di sollecitazioni esterne esso obbedisce all'equazione $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ e non all'equazione $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$). Come illustrato in [27] a pagina 21 , il sistema è caratterizzato da tre frequenze distinte: ω_0, $\widetilde{\omega}$ e ω_{ris} (esse vanno a unificarsi solo nel limite di oscillazioni debolmente smorzate, mentre in generale la frequenza ω della sollecitazione esterna è indipendente).

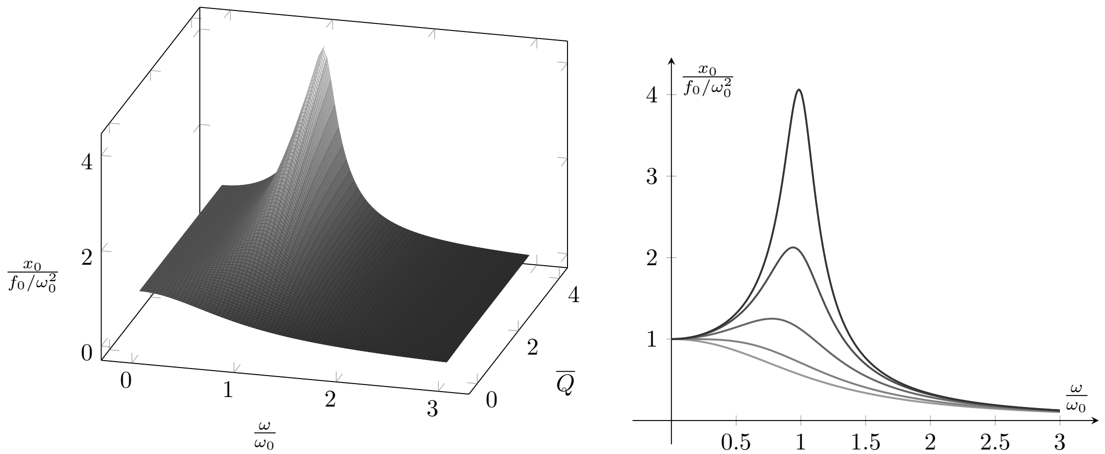
Teorema 20 (Adimensionalizzazione dell'equazione dell'ampiezza delle oscillazioni di un oscillatore smorzato forzato)**.** Misurando l'ampiezza in unità $\frac{f_0}{\omega_0^2}$ e misurando la frequenza sollecitante in unità ω_0 (introducendo il parametro $x = \frac{\omega}{\omega_0}$), si ha

$$\frac{x_0}{f_0/\omega_0^2} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{\overline{Q}^2 + \frac{1}{4}}}} \tag{85}$$

dove $\overline{Q}$ è il fattore di qualità, cioè π volte il numero di oscillazioni che compie l'oscillatore prima che l'ampiezza sia ridotta di un fattore e.

Dimostrazione. È sufficiente partire dalla formula dell'ampiezza (81): $x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2}}$. Si effettuano i cambi di variabile e si riordina. Si ottiene $\frac{x_0}{f_0/\omega_0^2} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2+\frac{x^2}{\tau^2\omega_0^2}}}$. Si passa poi alla variabile Q definita nella (21c) $Q = \tau\omega_0$, e infine si sfrutta la (40b) per rifarci al fattore di qualità $\overline{Q}$.

• In Fig. 1 nella pagina successiva sono plottate la superficie del teorema (85) e le sue sezioni per $\overline{Q} = 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$: le figure con $\overline{Q}$ più alto sono quelle più scure, e infatti sono meno smorzate, cioè con più vistosi effetti di risonanza (si ricordi che sull'asse delle y c'è l'ampiezza dell'oscillazione). Osservando con attenzione il grafico si vede che maggiore è $\overline{Q}$ e più alta è la frequenza di risonanza (come d'altronde è evidente dalla (83b)) e che la frequenza di risonanza va a coincidere con quella propria del sistema nel limite $\overline{Q} \to \infty$ (che fisicamente corrisponde all'assenza di dissipazioni). Ciò è evidenziato graficamente dal fatto che al crescere di Q i picchi si spostano verso destra tendendo all'ascissa $x = 1$.



(a) Funzione (85), riportata anche sul frontespizio (su un dominio diverso).

(b) Sezioni del grafico 1a per $\overline{Q} = 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

Figura 1

31 Che condizione deve soddisfare il fattore di qualità perché la frequenza che massimizza l'ampiezza non sia quella nulla?

- Deve essere maggiore di $\frac{1}{2}$.

Calcolando la derivata della (85) si vede che si annulla per $x = \sqrt{\frac{4\overline{Q}^2-1}{4\overline{Q}^2+1}}$ (come descritto nella derivazione della (79b)). Chiaramente se $\overline{Q} \to \infty$ si ha massimo in corrispondenza di $x = 1$ (in assenza di attriti la frequenza alla quale corrisponde la massima ampiezza è la frequenza propria del sistema). Se $\overline{Q} \to \frac{1}{2}$ si ha massimo in corrispondenza di $x = 0$, e infatti la penultima linea separa due insiemi di curve: per fattori di qualità più piccoli si ha che aumentando la frequenza di sollecitazione si a sempre una diminuzione dell'ampiezza dell'oscillazione (se $\overline{Q} > \frac{1}{2}$ ciò è vero solo se la frequenza sollecitate è maggiore di quella di risonanza, ovvero nella regione discendente a destra del massimo della curva). In altre parole si ha che, come si intuisce dal grafico (e come si potrebbe anche dimostrare studiando la derivata) per $0 < \overline{Q} < \frac{1}{2}$ la funzione è monotona decrescente: non ci sarà nessun massimo locale, i massimi coincideranno sempre con $x = 0$ cioè con il tendere a zero della frequenza sollecitante (quando la frequenza sollecitante tende a questo limite, l'ampiezza dell'oscillazione tende *sempre* a $\frac{f_0}{\omega_0^2}$, indipendentemente dal fattore di qualità, vedi anche [32] in questa pagina).

32 Quanto vale l'ampiezza dell'oscillazione dell'oscillatore smorzato forzato a regime nei casi limite $\omega \to 0$, $\omega = \omega_0$ e $\omega \to \infty$?

- In quanto segue *non* si suppone di essere nel limite debolmente smorzato.

Teorema 21 (Ampiezza dell'oscillazione dell'oscillatore smorzato forzato nei casi limite $\omega \to 0$, $\omega = \omega_0$ e $\omega \to \infty$)**.** Se ω è la frequenza della forza sinusoidale sollecitante, nei casi limite $\omega \to 0$, $\omega = \omega_0$ e

$\omega \to \infty$, l'oscillatore smorzato forzato è caratterizzato da queste ampiezze di oscillazione

$$x_0 = \begin{cases} \dfrac{f_0}{\omega_0^2} & \text{se } \omega \to 0 \quad (86a) \\ \dfrac{f_0}{\omega_0^2}\sqrt{\overline{Q}^2 + \dfrac{1}{4}} & \text{se } \omega = \omega_0 \quad (86b) \\ \dfrac{f_0}{\omega^2} & \text{se } \omega \to \infty \quad (86c) \end{cases}$$

dove $\overline{Q}$ è il fattore di qualità.

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema è comodo fare riferimento alla formula per per l'ampiezza adimensionalizzata (85):

$$\frac{x_0}{f_0/\omega_0^2} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{\overline{Q}^2+\frac{1}{4}}}} \tag{87}$$

dove $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Calcolando i limiti del secondo membro si perviene alla tesi. I tre limiti corrispondono rispettivamente a $x \to 0$, $x \to 1$ e $x \to \infty$, che restituiscono rispettivamente 1, $\sqrt{\overline{Q}^2 + \frac{1}{4}}$ e 0. Le (86a) e (86b) sono allora immediate. Ma anche la (86c) lo è perché per x grande il secondo membro della (87) va come $\frac{1}{x^2}$.

- Nota che al denominatore della (86c) non c'è il pedice 0. Essa dice non solo che l'ampiezza x_0 va a zero se la frequenza sollecitante diverge, ci dice anche *come* va a zero (asintoticamente scalerà come l'inverso del quadrato della frequenza sollecitante). Scrivere semplicemente 0 al posto di $\frac{f_0}{\omega^2}$ sarebbe stato in un certo senso corretto (se la frequenza sollecitante diverge, l'ampiezza dell'oscillazione svanisce, qualunque sia il fattore di qualità), ma meno informativo.
- Come osservato in [24] a pagina 20, nel limite debolmente smorzato la coincidenza di ω con ω_0 porta l'ampiezza a divergere. Ciò può essere visto come una conseguenza della (86b) in due modi equivalenti: 1) Nel limite debolmente smorzato $\overline{Q} \to \infty$ 2) nel limite debolmente smorzato $\overline{Q} \to Q = \tau\omega_0$ quindi $x_0 = \frac{f_0 \tau}{\omega_0}$, ma in tale limite si ha anche $\tau \to \infty$.

33 Qual'è la massima ampiezza di oscillazione per un oscillatore smorzato forzato a regime?

- In quanto segue *non* si suppone di essere nel limite debolmente smorzato.

Teorema 22 (Massima ampiezza di oscillazione per un oscillatore smorzato forzato a regime)**.** La massima ampiezza di oscillazione per un oscillatore smorzato forzato a regime è data da

$$x_{0,\max} = \begin{cases} \dfrac{f_0}{\omega_0^2}\left(\overline{Q} + \dfrac{1}{4\overline{Q}}\right) & (\text{se } \overline{Q} \geqslant \frac{1}{2}) \quad (88a) \\ \dfrac{f_0}{\omega_0^2} & (\text{se } 0 < \overline{Q} \leqslant \frac{1}{2}) \quad (88b) \end{cases}$$

dove $\overline{Q}$ è il fattore di qualità.

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema è comodo fare riferimento alla formula per per l'ampiezza adimensionalizzata (85):

$$x_0(x) = \frac{f_0}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{\overline{Q}^2+\frac{1}{4}}}} \tag{89}$$

dove $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. In base a quanto visto in [27] a pagina 21 sappiamo che si avrà un massimo se $x = \sqrt{\frac{4\overline{Q}^2-1}{4\overline{Q}^2+1}}$ (purché $\overline{Q} \geqslant \frac{1}{2}$). Sostituendo questo valore nella (89) troviamo l'ampiezza in condizioni di risonanza, cioè la (88a). La (88b) è una conseguenza del fatto che, come si è visto in [31] nella pagina precedente se $\overline{Q}$ spazia in quel range si ha l'ampiezza massima nel limite delle basse frequenze, quindi nel limite $x \to 0$ in (89).

• Dalla (88a) si vede che se il fattore di qualità è molto grande, l'ampiezza massima dell'oscillazione diverge come $\frac{f_0}{\omega_0^2}\overline{Q}$. Ma in tale limite $\overline{Q}$ coincide con $Q = \tau\omega_0$ quindi si trova $x_{0,\max}$ divergerà come $\frac{f_0\tau}{\omega_0}$.

• Ovviamente il valore di $\overline{Q}$ da solo non implica che il sistema oscillerà con ampiezza data dalla opportuna (88). Il teorema 22 dice solo che se $\overline{Q}$ ha un dato valore (dato dalle caratteristiche del sistema) e se la frequenza oscillante è quella giusta (quella di risonanza (79) in un caso, il limite verso le basse frequenze dall'altro) allora si ha la massima ampiezza possibile compatibile con quel valore $\overline{Q}$, ed è data dalle (88).

34 Quanto vale lo sfasamento dell'oscillatore smorzato forzato a regime con la forza sollecitante?

• In questo articolo abbiamo sempre scritto con il meno la differenza di fase tra l'oscillatore e la forza sollecitante (abbiamo studiato soluzioni della forma $x(t) = x_0 \sin(\omega t - \phi)$), questo è il motivo per cui nella (90) si scrive $-\phi$ e non ϕ. Tuttavia nel grafico viene plottato ϕ.

Teorema 23 (Sfasamento con la forza sollecitante dell'oscillatore smorzato forzato)**.** Lo sfasamento con la forza sollecitante dell'oscillatore smorzato forzato è dato da

$$-\phi = -\arccos\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{\overline{Q}^2 + \frac{1}{4}}}}\right) \tag{90}$$

dove $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Dimostrazione. Partiamo dalla (62)

$$x(t) = x_0 \sin\left(\omega t - \arccos\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}}\right)\right) \tag{91}$$

dove per brevità abbiamo chiamato x_0 l'ampiezza, che non è importante qui.
Ponendo $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ e sfruttando la definizione $Q = \tau\omega_0$ introdotto in [7] a pagina 9 possiamo scrivere in modo più interessante (vedi grafico) l'argomento dell'arcocoseno, e giungere alla tesi (viene sfruttata anche la (40b))

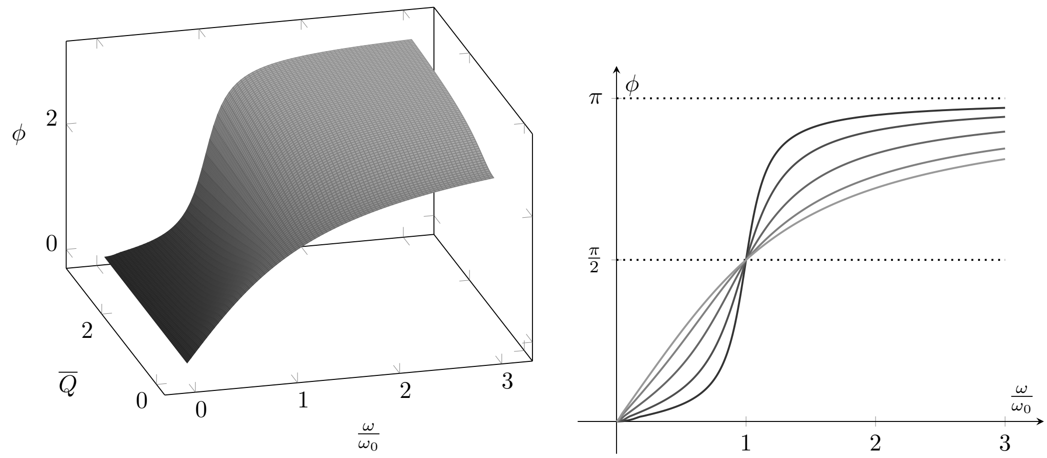
$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}} = \frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{\overline{Q}^2 + \frac{1}{4}}}} \tag{92}$$

• Il caso $\omega = \omega_0$ è banale per la (63). Volendo possiamo anche vederlo come caso limite nella formula generale:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{\overline{Q}^2 + \frac{1}{4}}}} = 0 \tag{93}$$

quindi la (90) dice che se $\omega \to \omega_0$ allora $\phi \to \frac{\pi}{2}$. Questo fatto è evidente dal grafico: il valore del fattore di qualità influisce sullo sfasamento, tranne nel caso particolare $\omega = \omega_0$ (se $x = 1$ lo sfasamento è $\frac{\pi}{2}$ indipendentemente dal fattore di qualità).

• In Fig. 2 nella pagina successiva sono plottate la superficie del teorema 23 (a segni invertiti, sull'asse delle y c'è ϕ, non $-\phi$) e le sue sezioni per $\overline{Q} = 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ (le figure con $\overline{Q}$ più alto sono quelle più scure: sono quelle meno smorzate, cioè con più vistosi effetti di risonanza).



(a) Funzione (90).

(b) Sezioni del grafico 2a per $\overline{Q} = 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

Figura 2

35 L'energia meccanica dell'oscillatore smorzato forzato a regime e in condizioni di debole smorzamento è una costante del moto?

• No (tranne nel caso particolare $\omega = \omega_0$). Concentriamoci per semplicità sul caso del sistema massa molla. Poiché siamo in condizioni di debole smorzamento il sistema oscillerà con frequenza $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ quindi $k = m\omega_0^2$ e l'energia meccanica del punto oscillante può essere scritta come

$$E = \frac{1}{2}m(v^2 + \omega_0^2 x^2) \tag{94}$$

A regime il punto oscilla con legge oraria $x(t) = x_0 \sin(\omega t - \phi)$ quindi si trova

$$E = \frac{1}{2}m x_0^2 \left[\omega^2 \cos^2(\omega t - \phi) + \omega_0^2 \sin^2(\omega t - \phi)\right] \tag{95}$$

e dunque l'energia dell'oscillatore non è una costante del moto a meno che $\omega = \omega_0$ (in quel caso la relazione fondamentale della trigonometria diventa utilizzabile e si trova $E = \frac{1}{2}m x_0^2 \omega^2 = \frac{1}{2}m x_0^2 \omega_0^2$).

• Comunque poiché il sistema è periodico, a ogni periodo la variazione di energia è zero: l'energia dissipata in un periodo coincide con l'energia fornita dall'esterno.

36 Come si può esaminare l'oscillatore forzato in condizioni di debole smorzamento dal punto di vista energetico?

Teorema 24 (Potenza erogata dalla forza esterna nel caso dell'oscillatore smorzato forzato in condizioni di debole smorzamento)**.** Nel caso dell'oscillatore smorzato forzato in condizioni di debole smorzamento, la potenza media erogata dalla forza esterna $F(t) = F_0 \sin \omega t$ vale $(x_0, F_0 > 0)$

$$\langle W \rangle_T = \frac{1}{2} x_0 F_0 \frac{\omega^2}{\sqrt{\tau^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2}} \tag{96a}$$

$$\langle W \rangle_T = \frac{1}{2} x_0 F_0 \omega \sin \phi \tag{96b}$$

Dimostrazione. Per calcolare il lavoro Fdx fatto dalla forza sollecitante nel tempo $t \to t+dt$ devo calcolare il differenziale della (62):

$$x(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2}} \sin\left(\omega t - \arccos\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2}}\right)\right) \tag{97}$$

ottenendo (come già fatto altrove chiamo semplicemente x_0 l'ampiezza dell'oscillazione $x(t)$ e $-\phi$ la costante di fase)

$$d\mathcal{L}_{t\to t+dt} = F_0 \sin\omega t dx = F_0 \sin\omega t \cdot x_0\omega\cos(\omega t-\phi)\cdot dt \tag{98}$$

dividendo per dt trovo la potenza istantanea. La potenza media in un periodo è allora pari a (estraggo le costanti e indico i valori medi con $\langle \ldots \rangle$)

$$\langle W \rangle_T = F_0 x_0 \omega \langle \sin\omega t \cos(\omega t-\phi)\rangle \tag{99}$$

Ma

$$\sin a \cos(a-b) = \frac{\sin(2a-b)+\sin b}{2} \tag{100}$$

Quindi, considerato che $\langle f(x)+g(x)\rangle = \langle f(x)\rangle + \langle g(x)\rangle$ (calcoliamo i valori medi con degli integrali), che $\langle \sin(2\omega t-\phi)\rangle = 0$, e che $\sin\phi$ è una costante quindi $\langle\sin\phi\rangle = \sin\phi$, si trova la (96b). La (96a) è allora una conseguenza della (72a).

- La positività di F_0 e x_0 è dovuta al fatto che dobbiamo essere coerenti con i risultati sviluppati precedentemente nell'articolo, e come si è già fatto notare non sono limitazioni che pregiudicano significativamente la generalità.

Lista delle domande

Pace non è arrendersi alla prepotenza.

Sergio Mattarella
25 aprile 2022